Esercizi svolti
di Matematica Finanziaria

Anno Accademico 2007/2008

Rossana Riccardi
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia
Facoltà di Economia, Università di Pisa,
Via Cosimo Ridolfi 10, 56124 Pisa, ITALY
E-mail: riccardi@ec.unipi.it

Versione Preliminare
Gennaio 2008

Indice

Capitolo 1

Leggi di capitalizzazione

1.1 Introduzione

La presente dispensa ad uso degli studenti dei corsi di Matematica Generale si propone come scopo di fornire alcuni esercizi di matematica finanziaria, in parte svolti integralmente, in parte riportando i soli risultati finali, per aiutare gli studenti nella preparazione dell'esame. Per la parte teorica si rinvia al testo di riferimento segnalato nel programma del corso. All'inizio di ogni capitolo verranno fatti solo brevi riferimenti teorici per richiamare i principali concetti in uso negli esercizi. In ogni capitolo, dopo la premessa teorica, saranno presenti una sezione di esercizi divisi per argomento trattato ed una sezione conclusiva con temi d'esame ed esercizi riassuntivi.

1.2 Richiami di teoria

Siano C un capitale versato o riscosso al tempo $t = 0$ ed $M(t)$ la somma ottenuta alla scadenza t relativa a tale capitale. La somma M viene indicata con il termine montante ed è equivalente alla seguente espressione:

$$M = C + I$$

dove C rappresenta il capitale investito ed I gli interessi maturati sul capitale nel periodo $(0, t)$, ovvero la remunerazione richiesta per lasciare investito il capitale anzichè utilizzarlo in maniera differente.

Si definisce *legge di capitalizzazione* e si indica con $f(t)$ la legge che esprime il montante ottenuto al tempo t di un capitale unitario investito al tempo 0. La funzione $M(t)$ quindi dipende dalla formulazione matematica del fattore di capitalizzazione $f(t)$:

$$M(t) = C \cdot f(t)$$

Il fattore di montante, affinchè $M(t)$ sia una legge di capitalizzazione deve verificare le seguenti proprietà:

i) $f(t)$ è definito $\forall\ 0 \leq t \leq T$

ii) $f(0) = 1$

iii) $f(t)$ è non decrescente

Si definisce *legge di attualizzazione* e si indica con $v(t)$ la legge che esprime il capitale investito al tempo 0 corrispondente ad un montante unitario al tempo t. La relazione che lega, quindi, capitale, montante e fattore di attualizzazione è la seguente:

$$C = M \cdot v(t) \tag{1.2.1}$$

Due regimi f e v, rispettivamente di capitalizzazione e di attualizzazione, si dicono *coniugati* se $f(t) \cdot v(t) = 1\ \forall\ t \geq 0$.

Un regime di capitalizzazione si dice *scindibile* se

$$f(t) = f(s) \cdot f(t - s) \tag{1.2.2}$$

Questa proprietà garantisce l'assenza di possibilità di arbitraggio, ovvero che il montante che si ottiene investendo un capitale unitario in $t = 0$ Si può dimostrare che l'unico regime scindibile è quello esponenziale.

1.2.1 Regimi notevoli

Varie sono le funzioni matematiche che possono esprimere una legge di capitalizzazione $f(t)$ e le rispettive leggi di attualizzazione $v(t)$. I regimi più noti sono: regime semplice, composto e sconto commerciale. Di seguito si riportano, brevemente, le principali caratteristiche di tali leggi finanziarie.

Regime di capitalizzazione semplice

La legge di capitalizzazione semplice si basa sul presupposto che il montante di un capitale sia incrementato, al variare della scadenza t, con andamento lineare. La sua formulazione matematica è:

$$f(t) = 1 + i \cdot t,\ t \geq 0 \tag{1.2.3}$$

da cui

$$M(t) = C \cdot (1 + i \cdot t) \tag{1.2.4}$$

dove i è il tasso di interesse sul periodo unitario.

Regime di sconto semplice o razionale
È il regime di sconto coniugato del regime di capitalizzazione semplice. La sua espressione matematica è:

$$v(t) = \frac{1}{1+i\cdot t},\ t \geq 0 \tag{1.2.5}$$

da cui

$$C = \frac{M}{1+i\cdot t} \tag{1.2.6}$$

Regime dello sconto commerciale
Il regime di sconto commerciale viene utilizzato prevalentemente per lo sconto delle cambiali finanziarie. La sua formulazione matematica è:

$$v(t) = 1 - d\cdot t,\ t \geq 0 \tag{1.2.7}$$

da cui

$$C = M\cdot(1 - d\cdot t) \tag{1.2.8}$$

dove d è il tasso di sconto sul periodo unitario. Il regime di capitalizzazione coniugato del regime di sconto commerciale è dato da

$$v(t) = \frac{1}{1-d\cdot t},\ t \geq 0 \tag{1.2.9}$$

da cui

$$M(t) = C\cdot\frac{1}{1-d\cdot t} \tag{1.2.10}$$

Regime di capitalizzazione composta
Il regime di capitalizzazione composta è il regime utilizzato per il calcolo degli interessi su conto corrente, per i titoli con cedola, per il calcolo delle rate dei prestiti etc. Nella pratica è indubbiamente il regime più frequente. La sua formulazione matematica è la seguente:

$$f(t) = (1+i)^t, \ t \geq 0 \tag{1.2.11}$$

da cui

$$M(t) = C \cdot (1+i)^t \tag{1.2.12}$$

Il regime di sconto coniugato del regime composto è per definizione dato da:

$$f(t) = (1+i)^{-t}, \ t \geq 0 \tag{1.2.13}$$

da cui

$$C = M \cdot (1+i)^{-t} \tag{1.2.14}$$

Se la durata dell'investimento non è un numero intero di periodi, si possono usare due approcci differenti per il calcolo della quota interessi. Sia t la durata della capitalizzazione e sia $t = n + f$ dove n rappresenta il numero intero di periodi ed f la sua parte frazionaria. I due approcci per il calcolo del montante di un'operazione con durata non intera sono i seguenti:

i) *convenzione lineare*: la parte frazionaria viene calcolata ad interessi semplici
$$M(t) = C(1+i)^n(1+i \cdot f)$$

ii) *convenzione esponenziale*: gli interessi vengono calcolati in capitalizzazione composta per l'intero periodo
$$M(t) = C(1+i)^t$$

1.2.2 Tassi equivalenti

Quanto la capitalizzazione degli interessi non avviene annualmente, ma con cadenze temporali più frequenti (ad esempio mensile, trimestrale, etc.) è necessario valutare l'investimento con il tasso di interesse riferito al periodo di capitalizzazione. Nasce quindi l'esigenza di convertire i tassi annui in tassi *periodali equivalenti*.

La metodologia di conversione differisce a seconda del regime utilizzato:

i) *capitalizzazione semplice*

$$i_n = \frac{i}{n} \tag{1.2.15}$$
$$i = n \cdot i_n \tag{1.2.16}$$

ii) *capitalizzazione composta*

$$i_n = (1+i)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{1.2.17}$$
$$i = (1+i_n)^n - 1 \tag{1.2.18}$$

iii) *sconto commerciale*

$$d_n = \frac{d}{n} \tag{1.2.19}$$
$$d = n \cdot d_n \tag{1.2.20}$$

Nelle formule precedenti i_n e d_n rappresentano, rispettivamente, il tasso di interesse ed il tasso di sconto commerciale riferiti ad $1/n$ di anno. Ad esempio, il tasso semestrale sarà indicato con i_2 poichè un semestre rappresenta la metà di un anno; i_4 è il tasso trimestrale, i_12 è il tasso mensile e così via.

Molto spesso, nei prestiti al consumo, viene indicato non il tasso annuo effettivo i ma il *tasso annuo nominale convertibile* n *volte* denominato j_n. Tale scelta è dettata principalmente da due fattori: il primo riguarda l'orizzonte di capitalizzazione, ovvero il fatto che la capitalizzazione spesso non è annuale ma riferita a periodi più brevi; un altrettanto valido motivo è riconducibile alla relazione tra tasso annuo effettivo i e tasso nominale convertibile j_n. Si ha infatti, $i > j_n$, quindi nel caso di prestiti è indubbiamente più appetibile avere un tasso dichiarato inferiore anche se non sempre è quello effettivo a cui tali prestiti vengono erogati. La relazione che intercorre tra il tasso j_n e i è indicata nelle seguenti formule:

$$i_n = \frac{j_n}{n} \tag{1.2.21}$$
$$j_n = n \cdot i_n \tag{1.2.22}$$

Conoscendo il tasso j_n, è possibile risalire al tasso effettivo periodale corrispondente i_n e quindi calcolare il tasso annuo effettivo i sfruttando l'equivalenza tra tassi nel regime prescelto.

1.3 Esercizi svolti

1.3.1 Capitalizzazione semplice

Esercizio 1.3.1 Calcolare il montante ad interesse semplice dei seguenti capitali:

a) € 500, tasso annuo $4,25\%$ per tre anni

b) € 1300, tasso annuo $6,7\%$ per cinque mesi

c) € 600, tasso annuo $5,8\%$ per 70 giorni

d) € 800, tasso annuo $6,20\%$ per 1 anno e 4 mesi

Soluzione
I montanti si ottengono mediante l'applicazione della formula (1.2.4) tenendo presente che i tassi dell'esercizio sono annui, quindi è necessario esprimere il tempo sempre in funzione di frazioni di anno.

a) $t = 3$, $M = 563,75$

b) $t = \frac{5}{12}$, $M = 1336,2916$

c) $t = \frac{70}{365}$, $M = 606,674$

d) $t = \frac{16}{12}$, $M = 866,133$

Esercizio 1.3.2 Quattro anni fa tizio concesse in prestito la somma di € 600 al tasso annuo del 7%. Inoltre egli concesse ancora in prestito, due anni e 5 mesi fa, la somma di € 1400 al tasso annuo dell' $8,2\%$. Determinare quale montante complessivo tizio incassa oggi.

Soluzione
La somma complessiva che tizio incassa oggi è data dalla capitalizzazione delle due somme, rispettivamente per quattro anni e 2 anni e cinque mesi, dei due prestiti concessi. In formule:

$$M = 600 \cdot (1 + 0,07 \cdot 4) + 1400 \cdot (1 + 0,082 \cdot \frac{29}{12}) = 2445,4333$$

Esercizio 1.3.3 Calcolare quale capitale impiegato ad interesse semplice al tasso annuo del $6,8\%$ per due anni e tre mesi, produce un interesse di € 81.090.

Soluzione
L'interesse prodotto da un capitale è:

$$I = C \cdot i \cdot t$$

da cui si ricava

$$C = \frac{I}{i \cdot t} = \frac{81090}{0,068 \cdot \frac{27}{12}} = 530000$$

Esercizio 1.3.4 Calcolare quale tasso annuo è stato impiegato il capitale di € 7600, sapendo che l'interesse semplice maturato per cinque anni è di € 2185.

Soluzione

Utilizzando la stessa formula dell'esercizio precedente per il calcolo dell'interesse si ha

$$i = \frac{I}{C \cdot t} = \frac{2185}{7600 \cdot 5} = 5,75\%$$

Esercizio 1.3.5 Un capitale di 5000 € viene impiegato ad un regime di interesse semplice per 18 mesi. Determinare a quale tasso annuo di interesse il montante prodotto è uguale ai $\frac{7}{6}$ del capitale impiegato.

Soluzione

Applicando la formula (1.2.4) si ha:

$$\frac{7}{6} \cdot 5000 = 5000 \cdot (1 + i \cdot \frac{18}{12})$$

da cui, dividendo per 5000 ambo i lati:

$$\frac{7}{6} = (1 + i \cdot \frac{18}{12})$$

e con semplici calcoli si giunge alla soluzione $i = \frac{1}{9} = 11,111\%$

Esercizio 1.3.6 Tizio ha concesso i seguenti prestiti:

a) due anni fa la somma di € 800 ad interesse semplice al tasso annuo del 7%

b) un anno e tre mesi fa la somma di € 600

Sapendo che egli riceve oggi la somma complessiva di € 1564,50 determinare a quale tasso annuo d'interesse è stato concesso il secondo prestito.

Soluzione

Il montante che tizio ottiene dai prestiti concessi è:

$$M = 800 \cdot (1 + 0,07 \cdot 2) + 600 \cdot (1 + i \cdot \frac{15}{12})$$

la somma che egli ottiene è pari a 1564,50, quindi si ha:

$$1564,50 = 800 \cdot (1 + 0,07 \cdot 2) + 600 \cdot (1 + i \cdot \frac{15}{12})$$

da cui si ricava $i = 7\%$

Esercizio 1.3.7 Tizio ha impiegato una certa somma per 2 anni e otto mesi ad interesse semplice al tasso annuo del 6%. L'interesse maturato supera di € 500 l'interesse prodotto dai $\frac{3}{5}$ della stessa somma impiegata per 3 anni e 4 mesi pure ad interesse semplice al tasso annuo del 6%. Determinare l'importo delle due somme.

Soluzione

L'interesse prodotto dalla prima somma è:

$$I_1 = C \cdot i \cdot t = C \cdot 0,06 \cdot \frac{32}{12}$$

mentre quello prodotto dalla seconda somma è:

$$I_2 = \left(\frac{3}{5} \cdot C\right) \cdot 0,06 \cdot \frac{40}{12}$$

Poichè $I_1 = I_2 + 500$ si ha:

$$C \cdot 0,06 \cdot \frac{32}{12} = \left(\frac{3}{5} \cdot C\right) \cdot 0,06 \cdot \frac{40}{12} + 500$$

da cui si ricava $C = 12500 = C_1$, ovvero la prima somma impiegata; la seconda somma è pari a $C_2 = \frac{3}{5} \cdot C_1 = \frac{3}{5} \cdot 12500 = 7500$.

1.3.2 Capitalizzazione composta

Esercizio 1.3.8 Calcolare il montante ad interesse composto annuo dei seguenti capitali:

a) € 340, tasso annuo $6,15\%$ per 10 anni

b) € 1400, tasso annuo 6% per 2 anni e 3 mesi

c) € 3200, tasso annuo 5% per 124 giorni.

Soluzione

I montanti si ottengono mediante l'applicazione della formula (1.2.12) tenendo presente che i tassi dell'esercizio sono annui, quindi è necessario esprimere il tempo sempre in funzione di frazioni di anno.

a) $t = 10$, $M = 617,56$

b) $t = \frac{27}{12}$, $M = 1596,123$

c) $t = \frac{124}{365}$, $M = 3253,483$

Esercizio 1.3.9 Calcolare quale capitale impiegato per 10 anni e 3 mesi ad interesse composto, al tasso annuo del $8,5\%$ dà come montante € 9608.

Soluzione

La formula (1.2.14) per il calcolo del capitale investito, noti montante, tasso i e tempo t diventa:

$$C = M \cdot (1+i)^{-t} = 9608 \cdot (1+0,085)^{-\frac{123}{12}} = 4163,688$$

Esercizio 1.3.10 Sei anni fa tizio ha versato presso una banca la somma di 3500 €. Inoltre tre anni e mezzo fa ha versato una certa somma x. Il montante complessivo che egli ritira oggi calcolato al tasso annuo composto del $9,75\%$ è di € 9440,13. Calcolare l'importo del secondo versamento.

Soluzione

Il montante ottenuto oggi è dato dalla somma dei due importi versati capitalizzati fino ad oggi:

$$M = 3500 \cdot (1+0,0975)^6 + x \cdot (1+0,0975)^{\frac{42}{12}}$$

imponendo l'uguaglianza $M = 9440,13$ si ricava l'importo x:

$$x = \frac{9940,13 - 3500 \cdot (1+0,0975)^6}{(1+0,0975)^{\frac{42}{12}}} = 2760,94$$

Esercizio 1.3.11 Una persona versa in banca la somma R. Quindi rispettivamente dopo 1 anno, 2 anni, 3 anni versa somme il cui importo cresce rispetto al precedente del 5%. Determinare quali somme quella persona versa annualmente, sapendo che il montante complessivo di cui dispone un anno dopo l'ultimo versamento calcolato ad interesse composto annuo dell' 11% è di € 4477,95.

Soluzione

Posto $t = 0$ l'istante in cui si versa la prima somma R, dire che l'importo cresce del 5% significa che ogni rata viene moltiplicata rispetto alla precedente per $1,05$, come riassunto nella tabella che segue:

t	0	1	2	3	4
Somme	R	$R \cdot 1,05$	$R \cdot 1,05^2$	$R \cdot 1,05^3$	M

Il montante complessivo diventa:

$$M = R\cdot(1+0,11)^4 + R\cdot 1,05\cdot(1+0,11)^3 + R\cdot 1,05^2\cdot(1+0,11)^2 + R\cdot 1,05^3\cdot(1+0,11)$$

da cui eguagliando $M = 4477,95$ si ricava con semplici passaggi, $R = 800$ e di conseguenza le somme risultano:

t	0	1	2	3
Somme	800	840	882	926, 1

Esercizio 1.3.12 Determinare il tasso di interesse composto annuo equivalente al tasso di interesse semplice dell'8% relativamente ad un impiego la cui durata è 3 anni e 5 mesi.

Soluzione

L'equivalenza si ottiene eguagliando i montanti ottenuti in capitalizzazione semplice e composta. Risulta quindi:

$$\begin{cases} M = C \cdot (1 + 0,08\frac{41}{12}) \\ \\ M = C \cdot (1 + i)^{\frac{41}{12}} \end{cases}$$

da cui si ottiene, dividendo per C ambo i membri dell'equazione:

$$1 + 0,08\frac{41}{12} = (1 + i)^{\frac{41}{12}}$$

e quindi

$$i = (1 + 0,08\frac{41}{12})^{\frac{12}{41}} - 1 = 7,33\%$$

Esercizio 1.3.13 La somma di € 3700 viene impiegata per sei anni ad interesse composto al tasso annuo del 7, 75%. Quale tasso annuo dovrebbe essere applicato per avere lo stesso montante qualora l'investimento fosse fatto ad interesse semplice?

Soluzione

Lo svolgimento è analogo a quello dell'esercizio 1.3.12, la soluzione finale è $i = 9,42\%$

Esercizio 1.3.14 Ho impiegato la somma di € 1800 al tasso di interesse composto dell' 8% per una certa durata. Alla scadenza ho reinvestito subito al tasso d'interesse composto del 8, 15% per 4 anni. Alla scadenza di questi 4 anni ho ritirato un montante complessivo di € 3447,52. Determinare la durata del primo impiego.

Soluzione

Il montante al tempo t è pari a:

$$M(t) = 1800 \cdot (1 + 0,08)^t$$

Il montante complessivo 4 anni dopo diventa:

$$M(t+4) = 1800 \cdot (1+0,08)^t \cdot (1+0,0815)^4 = 3447,52$$

Dall'espressione si ricava quindi:

$$(1+0,08)^t = \frac{3447,52}{1800 \cdot (1+0,0815)^4} = 1,4$$

da cui

$$t = \frac{\log 1,4}{\log 1,08} = 4,37$$

Esercizio 1.3.15 La somma di € 2000 è impiegata per 7 anni ad interesse composto al tasso del 6%; una seconda somma di € 2500 è impiegata anch'essa per 7 anni ad interesse composto ma al tasso del 5%. Supponendo che i due impieghi vengano unificati, determinare quale tasso dovrebbe essere applicato per avere lo stesso montante ad interesse composto. Si dica inoltre quale tasso dovrebbe essere applicato nel caso di unificazione, se l'impiego fosso fatto in capitalizzazione semplice.

Soluzione

Il montante complessivo che si ottiene dalle due somme è dato da:

$$M = 2000 \cdot (1+0,06)^7 + 2500 \cdot (1+0,05)^7 = 6525$$

Se i due investimenti fossero unificati il capitale investito in $t = 0$ sarebbe $C = 4500$ e lasciando invariato il montante finale ed il tempo di investimento si ottiene l'equazione, nell'incognita i:

$$6525 = 4500 \cdot (1+i)^7$$

Da cui si ricava il tasso $i = 5,45\%$

1.3.3 Tassi equivalenti

Esercizio 1.3.16 Calcolare il montante ad interesse composto frazionato dei seguenti capitali:

a) € 820, tasso semestrale 3% per 8 anni

b) € 640, tasso trimestrale $2,25\%$ per 8 anni

c) € 590, tasso annuo nominale convertibile trimestralmente 6% per 5 anni 6 mesi

Soluzione

a) $t = 16$, $M = 820 \cdot (1 + 0,03)^{16} = 1315,86$

b) $t = 32$, $M = 640 \cdot (1 + 0,0225)^{32} = 1304,386$

c) dal tasso annuo nominale j_4 si ottiene $i_4 = \frac{j_4}{4} = 0,015$ da cui esprimendo il tempo in trimestri $t = 22$, si ottiene $M = 818,66$

Esercizio 1.3.17 Calcolare quale capitale impiegato per 9 anni al $7,5\%$ annuo nominale convertibile semestralmente, genera un montante di 2500 €.

Soluzione

Dal tasso annuo nominale si ottiene quello effettivo semestrale:

$$i_2 = \frac{j_2}{2} = 0,0375$$

Applicando quindi la formula per il calcolo del montante con durate frazionate si ha:

$$2500 = C \cdot (1 + 0,0375)^{18}$$

da cui si ricava $C = 1288,71$

Esercizio 1.3.18 Calcolare dopo quanto tempo il capitale di € 1640 impiegato al 3% semestrale produce un montante di € 2640,80.

Soluzione

Il tempo è pari a $t = 16,12$ semestri ovvero circa 8 anni ed un mese.

Esercizio 1.3.19 Tre anni e due mesi fa, Tizio ha versato la somma di 3750 € presso una banca che applica la capitalizzazione semestrale degli interessi al $4,5\%$ semestrale. Oggi ritira il montante che reimpiega per altri due anni e otto mesi al tasso annuo nominale del 12% convertibile semestralmente. quale somma ritirerà alla scadenza? A quale tasso annuo equivalente è risultato complessivamente impiegato il capitale iniziale?

Soluzione

Il montante che Tizio ritira oggi è pari a:

$$M = 3750 \cdot (1 + 0,045)^{\frac{38}{6}} = 4955,655$$

Tenuto conto che $i_2 = \frac{j_2}{2} = \frac{0,12}{2} = 0,06$, a scadenza ritirerà:

$$M = 4955,655 \cdot (1 + 0,06)^{\frac{32}{6}} = 6761,85$$

La durata complessiva dell'impiego, espressa in frazioni di anno è pari a $t = \frac{70}{12}$, quindi il tasso medio di impiego può essere ricavato dalla seguente equivalenza:

$$6761,85 = 3750 \cdot (1 + i)^{\frac{70}{12}}$$

da cui si trova $i = 10,63\%$

Esercizio 1.3.20 Tizio ha depositato 8 anni fa una certa somma ed ancora 5 anni fa una somma uguale al doppio della prima più 2000 €. Il primo impiego è stato effettuato al tasso annuo nominale convertibile quadrimestralmente dell'$8,25\%$, il secondo al tasso dell'$1,94\%$ trimestrale. Oggi ritira un montante complessivo di € 24779,49. Determinare il valore delle somme depositate e l'equivalente tasso annuo del secondo deposito.

Soluzione

Le due somme C_1 e C_2 depositate sono pari a $C_1 = X$ e $C_2 = 2 \cdot X + 2000$ ed i tassi corrispondenti sono, rispettivamente, $i_3 = \frac{0,0825}{3} = 0,0275$ per il primo impiego e $i_4 = 0,0194$. Il montante complessivo diventa:

$$M = X(1 + 0,0275)^{24} + (2X + 2000) \cdot (1 + 0,0194)^{20}$$

Dall'espressione si ricava $C_1 = X = 4500$ e $C_2 = 2X + 2000 = 11000$

Esercizio 1.3.21 Una persona può investire la somma di 3500 € scegliendo tra:

1) un contratto finanziario che prevede la capitalizzazione degli interessi al 6% annuo

2) un contratto finanziario che prevede la capitalizzazione trimestrale al tasso dell' $1,4674\%$ trimestrale.

Determinare quale dei due contratti è più conveniente supponendo che l'operazione in ogni caso duri 4 anni.

Soluzione

Il primo contratto dopo 4 anni produce il seguente montante:

$$M = 3500 \cdot (1 + 0,06)^4 = 4418,67$$

Il secondo contratto, posto $t = 16$ trimestri, produce un montante pari a

$$M = 3500 \cdot (1 + 0,014674)^{16} = 4418,68$$

Le due forme di investimento sono quindi equivalenti poichè producono lo stesso montante finale.

1.3.4 Esercizi di riepilogo

Esercizio 1.3.22 *(Compito 29/1/2007, Corsi D-E)* Un individuo vuole disporre tra due anni di un capitale di 12000 €. A tal fine, in banca ha già versato 3 anni fa 7000 € al tasso del 10%. Egli pensa di versare oggi 500 € e il prossimo anno 500 €. Quale tasso dovrà stipulare con la banca per ottenere il capitale tra due anni?

Soluzione

Il capitale accumulato ad oggi, risulta pari a $M_0 = 7000 \cdot (1 + 0,1)^3 = 9317$. Alla scadenza il capitale accumulato sarà:

$$M_2 = (9317 + 500) \cdot (1 + i)^2 + 500 \cdot (1 + i) = 12000$$

posto $1 + i = x$, si tratta di risolvere la seguente equazione:

$$9817x^2 + 500x - 12000 = 0$$

che ha come soluzioni $x_1 = 1,08$ e $x_2 = -1,13$. Ricordando però che $x = 1+i$, solo la prima delle due soluzioni è accettabile, quindi si ricava $i = 8\%$

Esercizio 1.3.23 *(Compito 21/2/2007, Corsi D-E)* Due anni fa ed un anno fa ho ricevuto due somme di uguale importo € 1000 con l'impegno di restituirle in capitalizzazione composta al tasso d'interesse annuo del 3% attraverso il versamento di una rata R tra un anno ed una rata $2R$ tra due anni. Calcolare l'importo delle due rate sapendo che oggi il tasso d'interesse è diventato il 4%.

Soluzione

Il valore oggi del prestito ricevuto è pari a:

$$M_0 = 1000 \cdot (1 + 0,03)^2 + 1000 \cdot (1 + 0,03) = 2090,9$$

L'ammontare delle due rate per l'estinzione del prestito dovrà quindi verificare la seguente uguaglianza:

$$2R \cdot (1 + 0,04)^{-2} + R \cdot (1 + 0,04)^{-1} = 2090,9$$

Da cui si ricava $R = 743,6$ e $2R = 1487,2$

Esercizio 1.3.24 *(Compito 11/6/2007, Corsi D-E)* Impiego ad interesse composto annuo i il capitale di € 20000. Dopo due anni prelevo la metà del montante prodotto e dopo ulteriori 2 anni prelevo ancora un terzo del nuovo montante, sapendo che in deposito rimangono 8000 €. Calcolare il tasso i d'impiego del capitale.

Soluzione
Il montante ottenuto in $t = 2$ è pari a $M_2 = 20000 \cdot (1 + i)^2$, da questo montante la metà viene prelevata, quindi il capitale che rimane investito fino al tempo $t = 4$ è:

$$M_4 = 10000 \cdot (1 + i)^4$$

il deposito rimasto, dopo il prelievo di $\frac{1}{3}$, quindi, diventa:

$$8000 = \frac{2}{3}10000 \cdot (1 + i)^4$$

da cui si ricava $i = 4,6\%$

Esercizio 1.3.25 *(Compito 9/1/2007, Corsi D-E)* Tre anni fa si è versato in c/c al tasso annuo del 2% una somma di € 5000. Oggi si versano altri 5000 €. Prevedendo di versare tra due anni una somma R e tra quattro anni una somma $2R$ con l'obiettivo di avere in c/c tra sei anni una cifra di € 30000, calcolare l'importo delle rate da versare.

Soluzione
Lo svolgimento è del tutto analogo a quello dell'esercizio (1.3.23), il risultato finale è $R = 5814,85$ e $2R = 11629,7$

Esercizio 1.3.26 *(Compito 16/1/2006, Corsi D-E)* Un individuo riceve oggi un prestito di € 16000 che si impegna a restituire con una rata tra 3 anni di € 8000 e con una rata tra 6 anni di € 10000. Determinare il tasso annuo d'interesse necessario per rendere possibile tale ammortamento.

Soluzione
Il valore attuale delle rate deve uguagliare l'importo preso a prestito, quindi si ha:

$$16000 = 8000 \cdot (1 + i)^{-3} + 10000 \cdot (1 + i)^{-6}$$

posto quindi $x = (1 + i)^{-3}$ si ha $x^2 = (1 + i)^{-6}$, da cui si ricava, dividendo tutti i fattori per 2000, la seguente equazione:

$$5x^2 + 4x - 8 = 0$$

di cui l'unica soluzione accettabile è $x = 0,9266$. Ma ricordando che $x = (1 + i)^{-3}$ si ha $i = 2,57\%$

Esercizio 1.3.27 *(Compito 16/12/2005, Corsi D-E)* Un debito di € 8000 contratto 6 anni fa, doveva essere rimborsato con un unico versamento dopo 10 anni con interessi composti del 10%. Calcolare il versamento. Oggi il creditore cede il diritto di riscuotere il montante fra 4 anni per € 14900.

A quale tasso è stata fatta la valutazione e a quale tasso il creditore ha impiegato il capitale?

Soluzione

Il versamento sarà pari a:

$$M = 8000 \cdot (1 + 0,1)^{10} = 20750$$

Il tasso a cui cede l'impiego si ricava dalla seguente equivalenza:

$$14900 \cdot (1 + i)^4 = 20750$$

da cui si ha $i = 8,632\%$. Per calcolare, infine, il tasso a cui il creditore ha impiegato il capitale deve essere verificata la seguente uguaglianza:

$$8000 \cdot (1 + i)^6 = 14900$$

da cui si ricava $i = 10,92\%$. Al creditore, quindi, l'operazione è convenuta.

Esercizio 1.3.28 *(Compito 7/9/2005, Corsi D-E)* Supponendo di aver investito un capitale C all'istante zero per 3 anni alle seguenti modalità in c/c:

1) primo anno: tasso d'interesse annuo del 7%
2) secondo anno: tasso d'interesse annuo nominale convertibile semestralmente del 4%
3) terzo anno: tasso effettivo semestrale del 5%

Calcolare il tasso nominale annuo convertibile trimestralmente (j_4) che avrebbe prodotto lo stesso montante finale.

Soluzione Il tasso effettivo a cui viene effettuato l'impiego nel secondo anno si ricava dalla relazione $i_2 = \frac{j_2}{2} = 0,02$. Per trovare, quindi, il tasso j_4 bisogna prima ricavare il corrispondente tasso effettivo i_4 uguagliando i montanti ottenuti con l'operazione citata e impiegando lo stesso capitale per i 3 anni al tasso i_4. In formule si ha:

$$C(1 + 0,07) \cdot (1 + 0,02)^2 \cdot (1 + 0,05)^2 = C(1 + i_4)^{12}$$

ricordando che per ogni fattore di capitalizzazione, il tempo deve essere espresso in funzione del tasso utilizzato. Dall'equazione si ricava quindi $i_4 = 1,72\%$ e quindi $j_4 = i_4 \cdot 4 = 6,88\%$.

Esercizio 1.3.29 *(P.I. 16/12/2005, Corsi A-B-C)* Un capitale C viene impiegato in capitalizzazione semplice per 6 mesi al tasso del 4% annuo. La somma complessiva viene impiegata per 15 mesi al tasso annuo $i = 5\%$ (capitalizzazione composta convenzione lineare).

a) Determinare C sapendo che il montante finale ottenuto pari a 1301, 26 euro.

b) Successivamente si decide di investire i 1301, 27 euro al tasso annuo $i = 10\%$. Dopo quanto tempo si ottiene un montante pari a 1500? (capitalizzazione composta convenzione esponenziale).

Soluzione
a) Il montante ottenuto dalla prima operazione risulta pari a:

$$M_6 = C \cdot (1 + \frac{6}{12}0,04)$$

il montante finale, invece si ottiene capitalizzando M_6 fino alla scadenza, stavolta in capitalizzazione composta con convenzione lineare:

$$M_21 = C \cdot (1 + \frac{6}{12}0,04) \cdot (1 + 0,05) \cdot (1 + 0,05 \cdot \frac{3}{12}) = 1301,27$$

da cui si ottiene $C = 1200$.
b) Il montante ad un generico istante t diventa:

$$M(t) = 1301,27 \cdot (1 + 0,1)^t = 1500$$

da cui si ricava, invertendo la formula,

$$t = \frac{\log \frac{1500}{1301,27}}{\log 1,1} = 1,4912$$

Capitolo 2

Rendite

2.1 Richiami di teoria

Una rendita è una successione di somme di denaro R_s disponibili agli istanti di tempo t_s. Le poste sono da considerarsi generalmente tutte dello stesso segno. (ad esempio un debito viene rimborsato mediante rate periodiche che costituiscono una rendita). Se si considera anche il prestito iniziale, si ha un'operazione finanziaria detta spesso *operazione di rendita*.

La rendita si definisce *periodica* se le scadenze di ogni capitale differiscono per intervalli di tempo costanti. Questa categoria di rendite è largamente diffusa nella pratica, basti pensare alle operazioni di mutuo, assicurazione, etc che prevedono il pagamento di canoni costanti a fronte di una somma ricevuta, o, nel caso delle assicurazioni, per l'ottenimento di un servizio. D'ora in avanti limiteremo la trattazione a questa categoria di rendite, fermo restando che rendite non periodiche seguono le leggi di capitalizzazione ed attualizzazione presentate nel capitolo precedente.

Una rendita periodica è detta *immediata* se la scadenza del primo flusso è contestuale alla stipula dell'operazione; è detta, invece, *differita* di $\bar{t}$ periodi se le rate sono esigibili solo a partire dal periodo $\bar{t}$. Un esempio di rendita immediata di rendite è il mutuo, dove il pagamento della prima rata avviene solitamente un periodo dopo la concessione del credito; largo uso di rendite differite, invece, viene fatto nel credito al consumo (acquisto a rate di beni di consumo: televisori, computer, elettrodomestici in genere) dove spesso si utilizzano slogan di vendita del tipo compri oggi e inizi a pagare tra un anno.

Un'ulteriore classificazione delle rendite distingue tra rendite *anticipate* e *posticipate*. Una rendita si dice *anticipata* quando i pagamenti avvengono all'inizio di ogni periodo, si definisce invece *posticipata* quando i pagamenti avvengono alla fine di ogni periodo.

In generale si definisce **valore attuale** di una rendita il valore al tempo zero della somma dei flussi futuri che la rendita genera. Si definisce invece **montante** di una rendita la somma dei montanti delle singole rate calcolati con il regime di capitalizzazione prescelto.

Di seguito vengono richiamate le principali formule per il calcolo dei flussi finanziari generati dalle diverse tipologie di rendite. Per tutte le categorie si definiscono le seguenti quantità:

n = numero di rate

R = ammontare delle rate costanti

A = valore attuale

M = montante

Rendite periodiche immediate posticipate a rate costanti
Il valore attuale di una rendita immediata posticipata può essere ottenuto tramite la seguente formula:

$$A = R \cdot a_{n\rceil i}$$

dove

$$a_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Analogamente può essere calcolato il montante di tale rendita, all'atto dell'ultimo versamento:

$$M = R \cdot s_{n\rceil i}$$

dove

$$s_{n\rceil i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

Tali formule sono state ricavate tenendo conto che il regime di capitalizzazione utilizzato è la capitalizzazione composta.

Rendite periodiche immediate anticipate a rate costanti
Il valore attuale di una rendita immediata anticipata può essere ottenuto tramite la seguente formula:

$$A = R \cdot \ddot{a}_{n\rceil i}$$

dove

$$\ddot{a}_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$$

Analogamente può essere calcolato il montante di tale rendita, all'atto dell'ultimo versamento:

$$M = R \cdot \ddot{s}_{n\rceil i}$$

dove

$$\ddot{s}_{n\rceil i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

Di fatto le formule per il calcolo delle rendite anticipate sono equivalenti al calcolo di quelle posticipate capitalizzando per un periodo i risultati ottenuti.

In entrambi i casi, comunque, tutti i flussi devono essere adeguati in funzione della periodicità della rendita, ad esempio se la rendita è annuale il tasso di interesse i deve essere annuale ed il numero di pagamenti n deve essere espresso in anni, se la rendita è mensile il tasso da utilizzare è i_{12} ed i periodi n devono essere espressi in mesi.

Rendite periodiche differite a rate costanti

Nel caso di rendite differite, la distinzione tra rendite anticipate e posticipate spesso è ininfluente. È sempre possibile, infatti, trasformare una rendita anticipata in una posticipata equivalente.

Per quanto riguarda il calcolo del montante di tale rendita, il differimento non modifica il calcolo di tale valore poichè la capitalizzazione delle rate avviene dal pagamento della prima rata e non è influenzata dal differimento. Pertanto valgono le stesse formule prima ricordate per le rendite immediate.

Si modifica invece il calcolo del valore attuale di tale rendita, infatti si ha, indicando con $\bar{t}$ la durata del differimento:

$$A = R \cdot a_{n\rceil i} \cdot (1+i)^{-\bar{t}}$$

Rendite perpetue

Le rendite perpetue rappresentano una classe di rendite in cui la rata periodica viene corrisposta fino alla morte del contraente. Esempi di tali rendite sono l'usufrutto e l'assicurazione sulla vita. Nel caso dell'usufrutto, la nuda proprietà del bene viene scissa dal possesso del medesimo. Quindi finchè l'usufruttuario è in vita continua a percepire i frutti del possesso del bene (si pensi ad esempio al caso di un immobile concesso in locazione dall'usufruttuario; i canoni di locazione costituiscono una rendita perpetua per tale soggetto).

Nel caso di rendite perpetue si deduce facilmente che non è possibile calcolarne il montante. Non si conosce infatti la scadenza di tali rendite, presupposto indispensabile per stabilire il valore finale. È, altresì, calcolabile il valore attuale di tali rendite attraverso la seguente formula:

$$A = \frac{R}{i}$$

2.2 Esercizi svolti

2.2.1 Rendite

Esercizio 2.2.1 Su un fondo il cui tasso di rendimento annuo è del 12% vengono depositati 13000€ con l'intento di prelevare mensilmente in via posticipata 500€. Dopo quanto tempo avviene l'ultimo prelievo?

Soluzione L'operazione si configura come il valore attuale di una rendita periodica posticipata con rate mensili. Per questo motivo è necessario calcolare il tasso mensile equivalente a quello annuo $i = 12\%$. La relazione tra tassi equivalenti in capitalizzazione composta permette di calcolare tale tasso:

$$i_{12} = \sqrt[12]{1+i} - 1 = \sqrt[12]{1+0,12} - 1 = 0,95\%$$

il valore attuale quindi diventa:

$$13000 = 500 \cdot a_{n\rceil i_{12}}$$

da cui si ricava

$$\frac{13000}{500} = a_{n\rceil i_{12}} \quad \Rightarrow 26 = \frac{1-(1+i_{12})^{-n}}{i}$$

quindi sostituendo il valore di i_{12} l'equazione rimane nella sola incognita n e si risolve applicando la trasformazione logaritmica:

$$n = -\frac{\ln 1 - 26 \cdot 0,0095}{\ln 1,0095} = 30$$

L'ultimo prelievo avviene dopo 2 anni e mezzo.

Esercizio 2.2.2 Tizio intende costituire la somma di € 4500 effettuando 9 versamenti annui al tasso del 7%. Calcolare:

a) la rata di costituzione

b) il fondo di costituzione dopo il versamento della quarta rata

c) il fondo di costituzione cinque mesi dopo il versamento della quinta rata.

Soluzione
a) La rata di costituzione si ricava dalla formula del montante di una rendita:

$$4500 = R \cdot s_{9\rceil 0,07}$$

da cui si ricava $R = 375,7$.
b) Il fondo di costituzione dopo il pagamento della quarta rata coincide con il montante accumulato al tempo $t = 4$:

$$F(4) = 375,7 \cdot s_{4\rceil 0,07} = 1668$$

c) il montante 5 mesi dopo il versamento della quinta rata risulta:

$$M = 375,7 \cdot s_{5\rceil 0,07} \cdot (1 + 0,07)^{\frac{5}{12}} = 2222,26$$

Esercizio 2.2.3 Ripetere il precedente esercizio nell'ipotesi di costituzione anticipata.

Soluzione
a) La rata di costituzione si ricava dalla formula del montante di una rendita anticipata:

$$4500 = R \cdot \ddot{s}_{9\rceil 0,07}$$

da cui si ricava $R = 351,11$.
b) Il fondo di costituzione dopo il pagamento della quarta rata è

$$F(4) = 351,11 \cdot s_{4\rceil 0,07} = 1558,91$$

c) il montante 5 mesi dopo il versamento della quinta rata risulta:

$$M = 351,11 \cdot s_{5\rceil 0,07} \cdot (1 + 0,07)^{\frac{5}{12}} = 2076,87$$

Esercizio 2.2.4 Per costituire la somma di 9000 €, devo effettuare 20 versamenti trimestrali al tasso del $2,85\%$ trimestrale. Determinare l'ammontare di ciascuna rata ed il fondo disponibile alla fine del secondo anno.

Soluzione L'ammontare di ciascuna rata si ricava dalla seguente equivalenza:

$$9000 = R \cdot s_{20\rceil 0,0285} \quad \Rightarrow R = 340$$

Alla fine del secondo anno sono state versate 8 rate, quindi il fondo alla fine di tale anno risulta pari al montante di tali rate:

$$M = 340 \cdot s_{8\rceil 0,0285} \quad \Rightarrow M = 3007,35$$

Esercizio 2.2.5 Nella costituzione posticipata in 15 semestri di un certo capitale al tasso del $4,5\%$ semestrale, il fondo disponibile alla fine del settimo semestre ammonta a € 21220,76. Determinare l'importo della rata costante ed il capitale che si vuole costituire.

Soluzione L'importo della rata si ricava dall'equivalenza tra montante prodotto al pagamento della settima rata e fondo costituito. In formule:

$$M_7 = R \cdot s_{7\rceil 0,045} = 21220,76$$

da cui si ricava $R = 2646,26$. Il capitale che si vuole costituire, quindi, si ricava dal calcolo del montante all'atto dell'ultimo versamento, ovvero:

$$M_{15} = 2646,26 \cdot s_{15\rceil 0,045} = 55000$$

Esercizio 2.2.6 Per costituire la somma di 25000 €, Tizio programma di fare 36 versamenti mensili anticipati al tasso del $10,8\%$ annuo convertibile mensilmente. Determinare:

a) la rata di costituzione

b) il fondo di costituzione al quinto mese

Dopo un anno, Tizio è costretto a modificare il suo piano come segue: dal dodicesimo al ventesimo mese deve sospendere i versamenti previsti e prelevare mensilmente 150 €; quindi a partire dal ventunesimo mese riprende a versare € 477,233. Determinare qual è il fondo di cui tizio dispone dopo il settimo prelevamento e quanti ulteriori versamenti deve effettuare per raggiungere l'obiettivo voluto.
Soluzione I versamenti che Tizio deve effettuare sono mensili, quindi bisogna convertire il tasso annuo in quello mensile equivalente:

$$i_{12} = \frac{J_{12}}{12} = \frac{0,108}{12} = 0,009$$

la rata anticipata che tizio deve versare risulta:

$$R = \frac{A}{\ddot{s}_{n\rceil i}} = \frac{25000}{\ddot{s}_{\overline{36}\rceil 0,009}} = 585,83$$

Al quinto mese appena prima del versamento della sesta rata, il fondo di costituzione accumulato è:

$$F(5) = 585,83 \cdot \ddot{s}_{5\rceil 0,009} = 3009,19$$

Dal tempo $t = 0$ al tempo $t = 12$ escluso, Tizio ha effettuato 12 versamenti anticipati, quindi il montante accumulato in $t = 12$ è pari a:

$$F(12) = 585,83 \cdot \ddot{s}_{12\rceil 0,009} = 7455,09$$

Il settimo prelevamento avviene al tempo $t = 18$, quindi il fondo in quella data risulta pari alla differenza tra $F(12)$ capitalizzato fino al tempo $t = 18$ ed il montante dei prelievi effettuati. In formule si ha:

$$F(18) = 7455,09 \cdot (1 + 0,009)^6 - 150 \cdot s_{7\rceil 0,009} = 6788,053$$

Per calcolare, infine, il numero di ulteriori versamenti che devono essere fatti per raggiungere il capitale di 25000 euro, si procede calcolando per prima cosa il fondo costituito in $t = 20$.

$$F(20) = 7455,09 \cdot (1 + 0,009)^8 - 150 \cdot s_{9\rceil 0,009} = 6609,438$$

Quindi l'equivalenza per il calcolo del numero di rate è:

$$25000 = 6609,438 \cdot (1 + 0,009)^n + 477,233 \cdot s_{n\rceil 0,009}$$

da cui si ricava la seguente equazione in n:

$$59655,49 \cdot 1,009^n = 78025,89$$

trasformando in logaritmi si ricava:

$$n = \frac{\ln \frac{78025,89}{59655,49}}{\ln 1,009} = 29,96$$

Quindi servono ulteriori 29 versamenti interi ed uno parziale per raggiungere l'obiettivo previsto.

2.2.2 Accumulazione di capitale

Esercizio 2.2.7 Una persona intende costituire la somma di € 4000 mediante 9 versamenti annui posticipati. Il tasso inizialmente del 7% viene successivamente aumentato al 7,5% dopo il versamento della quarta rata. Calcolare la rata originaria e la nuova rata.
Soluzione La rata originaria si ottiene dalla formula inversa per il calcolo del montante di una rendita periodica posticipata:

$$R = \frac{A}{s_{n\rceil i}} = \frac{4000}{s_{9\rceil 0,07}} = 333,946$$

le rate successive alla modifica del tasso si ottengono dalla seguente equivalenza:

$$4000 = 333,946 \cdot s_{4\rceil 0,07} \cdot (1 + 0,075)^5 + R' s_{5\rceil 0,075}$$

da cui con semplici passaggi si ricava $R' = 322,187$

Esercizio 2.2.8 Un prestito di € 75000 è rimborsabile in 16 anni al tasso del 6% annuo, mediante pagamento di rate annue costanti. Dopo aver pagato la settima rata, il debitore ottiene di sospendere per 4 anni i pagamenti riprendendo quindi l'ammortamento con rate costanti in modo che il prestito

risulti estinto alla data prevista. Determinare la rata originaria e quella successiva alla sospensione.
Soluzione La rata annua del prestito prima della sospensione è:

$$R = \frac{A}{a_{n\rceil i}} = \frac{75000}{a_{16\rceil 0,06}} = 7421,41$$

il debito residuo dopo il pagamento della settima rata equivale al valore attuale delle rate non ancora corrisposte:

$$A'(7) = 7421,41 \cdot a_{9\rceil 0,06} = 50478,15$$

di conseguenza le nuove rate dopo la sospensione dovranno estinguere il debito residuo A' maggiorato degli interessi maturati nel periodo di sospensione:

$$A'(11) = R' \cdot a_{5\rceil 0,06} \quad \Rightarrow R' = \frac{50478,15(1+0,06)^4}{a_{5\rceil 0,06}} = 15128,68$$

Esercizio 2.2.9 Una persona intende costituire un capitale di € 20000 effettuando 10 versamenti annui posticipati. Dopo il versamento della settima rata, decide di aumentare a € 22000 la somma da costituire. Supponendo che il tasso di interesse applicato rimanga inalterato al 5%, calcolare la rata originaria e quella successiva alla modifica.

Soluzione

Tenuto conto che il tasso d'interesse è $i = 5\%$ ed il numero di versamenti $n = 10$, la rata prima della variazione risulta:

$$R = \frac{20000}{s_{10\rceil 0,05}} = 1590$$

Da cui si ricava l'importo delle successive rate da versare, tenendo conto che il capitale che si vuole costituire deve essere uguale al montante delle rate già versate più quelle ancora da versare R':

$$22000 = Rs_{7\rceil 0,05}(1+0,05)^3 + R's_{3\rceil 0,05}$$

Da cui si ha:

$$R' = 2224,5$$

Esercizio 2.2.10 Tizio intende costituire all'atto dell'ultimo versamento la somma di € 6000 mediante 10 versamenti annui. Dopo il terzo versamento sospende il quarto ed il quinto ricominciando ad eseguire regolarmente i versamenti a partire dal sesto incluso. Calcolare la rata originaria e quella modificata, al tasso $i = 5\%$, fermo restando che la costituzione viene completata al tempo 10.

Soluzione L'importo dei versamenti annui che tizio deve effettuare è:

$$R = \frac{6000}{s_{10\rceil 0,05}} = 477$$

Impostando l'uguaglianza tra il capitale che si vuole costituire e la somma tra le rate già versate e quelle ancora da versare R' si ricavano quest'ultime:

$$6000 = R s_{3\rceil 0,05} (1 + 0,05)^7 + R' s_{5\rceil 0,05}$$

da cui si ha

$$R' = 703$$

2.2.3 Esercizi riassuntivi

Esercizio 2.2.11 *(Compito 15/9/2004, Corsi D-E)* Versando quattro rate annue anticipate di uguale importo in capitalizzazione composta al tasso annuo del 5%, si è costituito, al termine del terzo anno, un montante di € 11000. Determinare l'importo di tale rata. Determinare inoltre il numero dei versamenti supplementari (sempre annui e anticipati) necessari per costituire un capitale di 22000 € (l'ultimo versamento può essere di minore importo).
Soluzione l'ammontare dei versamenti annui anticipati si ottiene dalla formula per il calcolo del montante di una rendita anticipata:

$$M = R \cdot \ddot{s}_{n\rceil i} \quad \Rightarrow R = \frac{11000}{\ddot{s}_{4\rceil 0,05}} = 2430,6$$

Il numero di versamenti di pari importo per ottenere un capitale di 22000 è:

$$22000 = 2430,6 \ddot{s}_{n\rceil 0,05} \quad \Rightarrow 1,05^n = \frac{22000 \cdot 0,05}{2430,6 \cdot 1,05} + 1 \quad \Rightarrow n = \frac{\ln 1,43}{\ln 1,05} = 7,35$$

Sono necessari ulteriori 3 versamenti interi ed un quarto versamento di importo inferiore per ottenere tale capitale.

Esercizio 2.2.12 *(P.I. 16/12/2005, Corsi D-E)* Si vuole costituire un capitale di 20000€ in otto anni al tasso $i = 6\%$, rate posticipate. Dopo il pagamento della quarta rata, si sospende il pagamento per un anno. Si riprende regolarmente con una nuova rata posticipata, sapendo che al pagamento della prima rata dopo la sospensione, si versa *una tantum* di 2000 €. Determinare l'importo delle rate dopo la sospensione, sapendo che restano invariati sia l'interesse, sia il numero degli anni, sia il capitale.
Soluzione Le rate originarie della costituzione di capitale sono:

$$R = \frac{M}{s_{n\rceil i}} \quad \Rightarrow R = \frac{20000}{s_{8\rceil 0,06}} = 2020,72$$

Dopo la sospensione devono essere versate ulteriori 3 rate che vanno a formare il capitale di 20000 insieme al montante accumulato dal versamento delle quattro rate prima della sospensione, opportunamente capitalizzato dal tempo $t = 4$ al tempo $t = 8$, ed al versamento in $t = 6$ dell'*una tantum* di 2000 euro. L'equivalenza finanziaria tra tali flussi permette di ricavare le nuove rate R' come segue:

$$20000 = 2020,72 \cdot s_{4\rceil 0,06}(1 + 0,06)^4 + 2000(1 + 0,06)^2 + R' s_{3\rceil 0,06}$$

da cui si ottiene $R' = 2070,82$

Esercizio 2.2.13 *(Compito 9/12/2004, Corsi D-E)* Una persona vuole costituire un capitale di 40000 € in 10 anni al tasso annuo $i = 3\%$ con rate posticipate. Dopo il pagamento della terza rata riceve un'eredità di 5000 € che versa nel fondo, insieme al capitale già costituito. Sospende due anni i pagamenti. Riprende poi con rate posticipate in modo da terminare nello stesso tempo. Determinare il valore delle ultime rate.

Soluzione Il metodo risolutivo è analogo al precedente. La rata prima della sospensione ammonta a 3489,22. Le rate successive alla sospensione, invece, sono pari a 3877,6.

Esercizio 2.2.14 *(P.I. 29/1/2007, Corsi D-E)* Otteniamo oggi dalla banca un prestito di 12000€ da restituire con 5 rate annuali posticipate al tasso $i = 13\%$. Determinare la rata. Dopo 2 anni ci accorgiamo di aver bisogno di ulteriori 12000 € e ci rivolgiamo alla banca, ma quale sarà la nuova rata da pagare?
Soluzione La rata annua da pagare per l'estinzione del prestito ammonta a:

$$R = \frac{A}{a_{n\rceil i}} \quad \Rightarrow R = \frac{12000}{a_{5\rceil 0,13}} = 3411,77$$

Al tempo $t = 2$ il debito residuo viene incrementato di 12000 euro, quindi si ha un nuovo importo a' pari a:

$$A' = 3411,77 a_{3\rceil 0,13} + 120000 = 20055,71$$

ottenuto come somma tra il valore attuale delle rate non ancora corrisposte ed il nuovo importo preso a prestito. Tale debito deve essere estinto mediante il pagamento delle tre rate finali. Si ha quindi:

$$R' = \frac{A'}{a_{3\rceil 0,13}} \quad \Rightarrow R' = 8494$$

Esercizio 2.2.15 *(Compito del 18/9/2006, Corsi D-E)* A quale tasso i bisogna impiegare per ulteriori 10 anni il valore finale di una rendita annuale posticipata di 10 rate di € C ciascuna per ottenere un montante uguale al valore attuale di una rendita perpetua di uguale rata C?
Soluzione Il tasso i è la soluzione della seguente equazione:

$$\frac{C}{i} = C \cdot s_{10\rceil i}(1+i)^{10}$$

da cui si ottiene, esplicitando $s_{10\rceil i}$ e moltiplicando ambo i membri per $\frac{i}{C}$

$$1 = \left[(1+i)^{10} - 1\right](1+i)^{10}$$

da cui si ha la seguente equazione:

$$(1+i)^{20} - (1+i)^{10} - 1 = 0$$

posto $x = (1+i)^{10}$ si ha $x^2 = (1+i)^{20}$ e quindi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

l'equazione di secondo grado ha come radici: $x_1 = -0,618$ e $x_2 = 1,618$ di cui la prima soluzione chiaramente non è accettabile, visto il significato della variabile x. Dalla seconda soluzione si ha:

$$(1+i)^{10} = 1,618 \quad \Rightarrow i = \sqrt[10]{1,618} - 1 = 4,93\%$$

Esercizio 2.2.16 *(Compito del 21/2/2007, Corsi D-E)* Due rendite sono così strutturate:

- i) la prima prevede il pagamento di una rata R ogni 4 mesi per 7 anni
- ii) la seconda prevede il versamento di una rata annua di € 1000 sempre per 7 anni

Calcolare l'importo della rata R che rende equivalenti le due rendite nel caso in cui il tasso d'interesse annuo sia $i = 5\%$.
Soluzione Il montante generato dalla prima rendita si ottiene, dopo aver determinato il tasso quadrimestrale equivalente a quello annuo del 5%, tramite la formula del montante di una rendita periodica posticipata. Si ha quindi:

$$i_3 = \sqrt[3]{1 + 0,05} - 1 = 1,64\%$$
$$M_1 = Rs_{21\rceil 0,0164}$$

Il montante generato dalla seconda operazione, invece, è pari a :

$$M_2 = 1000 s_{7\rceil 0,05} = 8142$$

perchè si abbia l'equivalenza tra i due montanti la rata della prima rendita deve essere pari a:

$$M_1 = M_2 \quad \Leftrightarrow 8142 = Rs_{21\rceil 0,0164} \quad \Rightarrow R = 327,91$$

Capitolo 3

Ammortamenti

3.1 Richiami di teoria

L'ammortamento è un'operazione finanziaria che si configura come accensione di un prestito al tempo $t = 0$ dietro il pagamento di una serie di rate in istanti successivi $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Tale operazione è caratterizzata da due condizioni di chiusura:

$$A = D_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_t}{(1+i)^t}$$

ovvero il debito contratto al tempo zero deve essere uguale alla somma di tutti i pagamenti futuri. (*condizione di chiusura iniziale*). Un'analoga condizione può essere stabilita nel caso di montante finale (*condizione di chiusura finale*):

$$A \cdot (1+i)^n = \sum_{i=1}^{n} R_t \cdot (1+i)^t$$

ovvero il montante generato dalla somma di tutti i pagamenti deve essere uguale al montante del capitale preso a prestito. Le grandezze principali di un'operazione di ammortamento sono:

- C_t: quota capitale riferita al tempo t
- I_t: quota interesse riferita al tempo t
- D_t: debito residuo al tempo t
- E_t: debito estinto al tempo t

La quota capitale rappresenta l'ammontare di capitale rimborsato ogni anno. Insieme alla quota interessi concorre alla formazione della rata. Si ha infatti la seguente equivalenza:

$$R_t = C_t + I_t$$

La quota interessi, a sua volta, indica qual è ad ogni istante l'ammontare di interessi maturati sul debito residuo rispetto al periodo precedente. In formule:

$$I_t = D_{t-1} \cdot i$$

dove D_{t-1} rappresenta il debito residuo del periodo precedente. Se l'interesse viene riscosso in via anticipata la formula si modifica come segue:

$$I_t = D_t \cdot i$$

Le caratteristiche relative al debito residuo, sono raccolte nelle seguenti formule:

1) $D_0 = A$, il debito al tempo zero coincide con il capitale preso a prestito

2) $D_n = 0$, il debito deve essere estinto alla scadenza

3) $D_t = D_{t-1} - C_t$ il debito al tempo t è dato dalla differenza tra debito del periodo precedente e quota capitale

analoghe relazioni si possono costruire per il debito estinto:

1) $E_0 = 0$, il debito estinto al tempo zero è nullo

2) $E_n = A$, il debito estinto a scadenza coincide con il capitale preso a prestito

3) $E_t = E_{t-1} + C_t$ il debito estinto al tempo t è dato dalla somma tra debito estinto del periodo precedente e quota capitale

Infine la relazione tra debito estinto e residuo è data, ad ogni periodo, da:

$$A = E_t + D_t$$

I parametri che caratterizzano il piano d'ammortamento sono di solito raccolti in una tabella siffatta:

t	C_t	I_t	R_t	D_t	E_t
0	-	-	-	A	-
1	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
n	...	...	...	-	A

A seconda del tipo di ammortamento scelto, poi cambiano le modalità con cui vengono redatti tali piani. Di seguito vengono indicate le principali forme di ammortamento: italiano, francese ed americano.

3.1.1 Ammortamento italiano

L'ammortamento italiano o uniforme prevede che ciascuna quota di ammortamento (supposto che le rate siano equintervallate ed n sia il numero di periodi previsti per l'ammortamento) sia costante e pagata in via posticipata. Le quote capitali dunque possono essere calcolate con la seguente formula:

$$C_t = C = \frac{A}{n}$$

dove n rappresenta il numero di pagamenti e A l'importo del prestito. Il debito residuo ad ogni epoca, pertanto, risulta:

$$D_t = \frac{n-t}{n} A = (n-t)C$$

ovvero pari al numero di quote capitali non ancora corrisposte. Nell'ammortamento italiano le rate sono decrescenti e si calcolano come somma tra la quota capitale e la corrispondente quota interessi. La redazione del piano di ammortamento del prestito avviene con i seguenti passi:

1) si determinano le quote capitali
2) si compilano le colonne del debito residuo $D_k = D_{t-1} - C$ e del debito estinto $E_t = E_{t-1} + C$
3) si compila la colonna relativa alla quota interessi $I_t = D_{t-1} \cdot i$
4) si determina la rata come $R_t = C + I_t$

3.1.2 Ammortamento francese

L'ammortamento a rate costanti (francese) prevede che le rate siano posticipate e la somma ricevuta dal debitore all'inizio ($t = 0$) sia il valore attuale di una rendita a rate costanti. Ciascuna rata composta dalla somma di una quota capitale e di una quota interessi sul capitale residuo: si assume che la quota capitale sia progressivamente crescente con il pagamento delle rate. Per l'attualizzazione delle rate deve essere soddisfatto il vincolo di equivalenza finanziaria che in questo caso equivale a scrivere la seguente condizione:

$$A = \sum_{k=1}^{n} R(1+i)^{-k} = R \cdot a_{n\rceil i}$$

si ricavano quindi le seguenti relazioni:

$$R = C_k \cdot (1+i)^{n-k+1}$$

e

$$\frac{C_k}{C_{k-1}} = 1 + i$$

Infine il debito residuo ad ogni epoca può essere ricavato come valore attuale delle rate non ancora versate:

$$D_k = R \cdot a_{\overline{n-k}\rceil i}$$

I passaggi principale per la redazione di un piano d'ammortamento francese sono i seguenti:

1) si determina la rata d'ammortamento

2) si determina la quota interessi $I_t = D_{t-1} \cdot i$

3) si determina la quota capitale $C_t = R - I_t$

4) si determinano il debito residuo $D_t = D_{t-1} - C_t$ ed il debito estinto $E_t = E_{t-1} + C_t$

5) si ripete il procedimento dal passo 2)

3.1.3 Ammortamento americano

L'ammortamento americano, o con quote di accumulazione a due tassi, prevede che il debitore restituisca il capitale preso a prestito A con dei versamenti annuali costanti (quote di accumulazione) in n anni. Il capitale mutuato, quindi, viene corrisposto per intero alla scadenza ricorrendo al fondo costituito in via separata. Al creditore vengono invece corrisposti annualmente gli interessi maturati sul prestito.

I due tassi stanno ad indicare che di norma ci sono due interessi distinti legati allo svolgimento parallelo delle due operazioni (rimborso globale con interessi periodici e costituzione di un capitale). Un tasso quello secondo il quale vengono capitalizzate le quote di accumulazione (tasso i' di accumulazione per l'operazione di costituzione del capitale A) e l'altro è il tasso tecnico di remunerazione secondo il quale si calcolano le quote d'interesse del prestito (tasso i di remunerazione per l'operazione di rimborso prestito).

Il debitore paga ogni anno una quota d'interesse (si ipotizza posticipata) pari a:

$$I = A \cdot i$$

e la quota di accumulazione costante pari a:

$$R = \frac{A}{s_{n\rceil i}}$$

L'esborso complessivo è $R' = R + I$.

Se $' = i$ si ha che la rata di ammortamento periodale calcolata, coincide con quella dell' ammortamento di tipo francese.

3.1.4 Il Leasing

Il leasing è un contratto di finanziamento che consente, in cambio del pagamento di un canone periodico di avere la disponibilità di un bene strumentale allesercizio della propria professione o attività imprenditoriale e di esercitare, al termine del contratto, unopzione di riscatto (di acquisto) del bene stesso per una cifra pattuita, inferiore al valore di mercato del bene. Nelloperazione sono coinvolti 3 soggetti:

- *l'utilizzatore*: è colui che sceglie e utilizza il bene - nellambito dellesercizio di unimpresa, unarte, una professione o unattività istituzionale (di natura pubblica o non profit) e può riscattarlo al termine del contratto;
- *il concedente*: la società di leasing che acquista materialmente il bene scelto dallutilizzatore, conservandone la proprietà sino al momento del suo eventuale riscatto;
- *il fornitore*: è chi vende il bene, scelto dallutilizzatore, alla società leasing.

Premesso che loperazione di leasing presenta sia i vantaggi del finanziamento che quelli del noleggio, in quanto consente di poter disporre di beni senza bisogno di immobilizzare la somma di denaro necessaria per acquistarli. Il contratto di leasing è caratterizzato dai seguenti flussi:

- V_0: valore del bene
- B: anticipo solitamente il percentuale rispetto al valore del bene
- R_k: canoni di leasing
- E_n: valore di riscatto

L'equivalenza finanziaria che permette di ricavare i canoni di leasing, quindi, diventa:

$$V_0 - B = \sum_{k=1}^{T} \frac{R_k}{(1+i)^k} + \frac{E_n}{(1+i)^n}$$

ovvero nel caso di canoni costanti:

$$V_0 - B = R \cdot a_{T\rceil i} + \frac{E_n}{(1+i)^n}$$

3.2 Esercizi svolti

3.2.1 Ammortamento

Esercizio 3.2.1 Una persona ha contratto un prestito di 3000 € al tasso dell' 8%. Per tale prestito è previsto il pagamento annuo degli interessi in via posticipata e la restituzione del capitale globalmente dopo 10 anni. Per far fronte al rimborso il debitore versa annualmente presso una banca in via posticipata una somma pari ai 2/3 dell'interesse annuo al tasso del 7%. Determinare la differenza della somma da rimborsare e della somma costituita tramite i versamenti effettuati.
Soluzione La quota interessi pagata annualmente è pari a:

$$I = A \cdot i \quad \Rightarrow I = 240$$

La quota quindi versata presso la banca risulta pari a $R = \frac{2}{3} \cdot I = 160$. Il montante accumulato al momento della restituzione del prestito e la differenza rispetto al debito da corrispondere sono:

$$M = 160 \cdot s_{10\rceil 0,07} = 2210,63$$

$$\Delta = 3000 - 2210,63 = 789,37$$

Esercizio 3.2.2 Tizio ottiene in prestito la somma di 4500€ al cui rimborso deve provvedere fra 5 anni pagando annualmente ed anticipatamente gli interessi al tasso annuo del 9%. Per far fronte all'impegno assunto, egli versa presso una banca 250 € ogni semestre, tasso semestrale del 3%. Da parte sua il creditore versa ad un istituto bancario gli interessi via via riscossi al tasso annuo dell' 8,25%. Determinare:

a) quale somma tizio dovrà versare alla scadenza per coprire integralmente l'impegno assunto

b) di quale somma disporrà il creditore alla scadenza per effetto dei versamenti effettuati.

Soluzione
a) La somma che tizio dovrà versare a scadenza è pari alla differenza tra il debito contratto ed il montante dei versamenti effettuati:

$$\Delta = 4500 - 250 \cdot s_{10\rceil 0,03} = 1634$$

b) L'importo di cui disporrà il creditore alla scadenza sarà dato dalla somma tra il capitale prestato ed il montante degli interessi percepiti annualmente in via anticipata, $I = 4500 \cdot 0,09 = 405$:

$$M = 4500 + 405 \cdot \ddot{s}_{5\rceil 0,0825} = 7084,84$$

Esercizio 3.2.3 Una persona contrae un prestito di 2500 € al cui rimborso provvede pagando le seguenti quote di capitale: € 300 fra un semestre, € 500 fra due semestri, € 800 fra tre semestri, € 400 fra quattro semestri ed il residuo il quinto. Redigere il piano d'ammortamento sulla base di un tasso del 5% semestrale.
Soluzione Il piano d'ammortamento è riportato nella seguente tabella:

t	C_t	I_t	R_t	D_t	E_t
0	-	-	-	2500	-
1	300	125	425	2200	300
2	500	110	610	1700	800
3	800	85	885	900	1600
4	400	45	445	500	2000
5	500	25	525	-	2500

Esercizio 3.2.4 Tizio contrae un prestito di 5000€ al cui rimborso provvede mediante il pagamento di cinque rate annue; le prime quattro rate sono ciascuna di importo 1100€. Determinare l'importo dell'ultima rata sapendo che il tasso è il 7,25% annuo.
Soluzione Denotato con X l'importo dell'ultima rata, il prestito di 5000 deve rispettare la seguente condizione di chiusura iniziale:

$$5000 = 1100 \cdot a_{4\rceil 0,072} + X \cdot (1 + 0,0725)^{-5}$$

da cui si ricava:

$$X = \frac{5000 - 1100 \cdot a_{4\rceil 0,0725}}{(1 + 0,0725)^{-5}} = 1837,62$$

Esercizio 3.2.5 Una persona contrae un prestito di 30000 € assumendo l'impegno di rimborsare € 3000 al primo anno € 5000 ciascuno al secondo e terzo anno, € 6000 ciascuno al quarto e quinto anno, il residuo al sesto. Redigere il piano d'ammortamento sulla base di un tasso del 9%.

Soluzione Il piano d'ammortamento è raccolto nella seguente tabella:

t	R_t	C_t	I_t	D_t	E_t
0	–	–	–	30000	–
1	5700	3000	2700	27000	3000
2	7430	5000	2430	22000	8000
3	6980	5000	1980	17000	13000
4	7530	6000	1530	11000	19000
5	6990	6000	990	5000	25000
6	5450	5000	450	-	30000

Esercizio 3.2.6 Una persona ha contratto un prestito per la durata di 10 anni al tasso del 7%. Per l'estinzione di tale prestito paga annualmente alla fine di ciascun anno rate di € 600 per i primi 6 anni e di € 900 per i successivi 4 anni. Determinare l'importo del capitale mutuato ed il debito residuo dopo il pagamento della terza rata.
Soluzione Il valore del prestito è pari al valore attuale di tutte le rate corrisposte:

$$A = 600 \cdot a_{6\rceil 0,07} + 900 \cdot a_{4\rceil 0,07}(1 + 0,07)^{-6} = 4891,26$$

Il debito residuo dopo il pagamento della terza rata risulta:

$$D_3 = 600 \cdot a_{3\rceil 0,07} + 900 \cdot a_{4\rceil 0,07}(1 + 0,07)^{-3} = 4063$$

3.2.2 Ammortamento francese

Esercizio 3.2.7 Un prestito di 135000 € viene ammortizzato tramite il pagamento di 15 rate annue al tasso del 7%. Determinare la rata, la composizione della settima rata e il debito residuo dopo il pagamento della quinta rata.
Soluzione La rata del prestito risulta pari a:

$$R = \frac{S}{a_{15\rceil 0,07}} \quad \Rightarrow R = 14822,27$$

Nell'ammortamento francese la k-esima quota interesse si può calcolare come:

$$I_k = R \cdot (1 - v^{n-k+1})$$

dove $v = \frac{1}{1+i}$ quindi si ha:

$$I_7 = R \cdot (1 - v^9) = 6760$$

La settima quota capitale C_7 si trova come differenza tra R e la corrispondente quota interessi:

$$C_7 = R - I_7 = 8062,27$$

Infine, il debito residuo al tempo 5 coincide con il valore attuale delle rate ancora da pagare:

$$D_k = R \cdot a_{n-k\rceil i} \quad \Rightarrow D_5 = R \cdot a_{10\rceil 0,07} = 104105,5$$

Esercizio 3.2.8 Nell'ammortamento francese di un prestito di 20 anni la settima rata comprende una quota capitale di 500 ed una quota interessi di 450. Determinare il tasso e l'importo del prestito.
Soluzione La rata complessiva del prestito risulta pari a $R = C_7 + I_7 = 950$. Ricordando che $I_7 = i \cdot D_6$ si ha:

$$D_6 = R \cdot a_{20-6\rceil i} \quad \Rightarrow I_7 = R \cdot a_{14\rceil i} \cdot i$$

da cui si ricava $i = 4,7\%$ ed $A = 12155,12$

Esercizio 3.2.9 Nell'ammortamento francese di un prestito di 14 anni il rapporto fra il debito residuo dopo il versamento della quarta rata ed il debito residuo dopo il versamento della nona rata è 5/3. Calcolare il tasso del prestito.
Soluzione Dal testo dell'esercizio si ha $D_4 = \frac{5}{3}D_9$. Applicando le formule per il calcolo del debito residuo di un prestito risulta:

$$D_4 = R \cdot a_{10\rceil i}$$
$$D_9 = R \cdot a_{5\rceil i}$$

Da $D_4 = \frac{5}{3}D_9$, si ha

$$R \cdot a_{10\rceil i} = \frac{5}{3} \cdot R \cdot a_{5\rceil i}$$

da cui, dividendo per R:

$$\frac{1-(1+i)^{-10}}{i} = \frac{5}{3}\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}$$

moltiplicando per i $(i \neq 0)$ si ottiene dopo qualche calcolo

$$(1+i)^{-10} - \frac{5}{3}(1+i)^{-5} + \frac{2}{3} = 0$$

operando la sostituzione $y = (1+i)^{-5}$ si ha

$$3y^2 - 5y + 2 = 0$$

da cui si ottiene $y = \frac{2}{3}$ e sostituendo si ricava $i = 8,45\%$.

Esercizio 3.2.10 Nell'ammortamento francese di un prestito in 12 anni, l'ottava quota capitale è pari ai 7/3 della corrispondente quota interessi. Determinare il tasso del prestito.
Soluzione Dal testo si ha: $C_8 = \frac{7}{3} \cdot I_8$. L'esercizio può essere risolto seguendo due diversi approcci, ugualmente efficaci.

1) Si sfruttano le seguenti formule

   a) $C_8 = \frac{7}{3} \cdot I_8$
   b) $C_8 = R - I_8$
   c) $I_8 = D_7 \cdot i$ debito residuo del periodo precedente per il tasso i

   Da cui si ottiene: $D_k = R \cdot a_{n-k\rceil i} \Rightarrow D_7 = Ra_{5\rceil i}$

   Unendo le formule si ha

   $C_8 = \frac{7}{3} \cdot I_8$

   Sfruttando la b)

   $R - I_8 = \frac{7}{3} \cdot I_8 \quad \Rightarrow R = \frac{7}{3} \cdot I_8 + I_8 \quad \Rightarrow R = \frac{10}{3} \cdot I_8$

   Grazie alla c) $\Rightarrow R = \frac{10}{3} Ra_{5\rceil i} \cdot i$

   Da cui dividendo per R si ottiene un'espressione che dipende unicamente da i. Il risultato finale è $i = 7,4\%$

2) sfruttando il fatto che

   a) $C_k = R \cdot v^{n-k+1}$ con $v = \frac{1}{1+i}$
   b) $I_k = R \cdot (1 - v^{n-k+1})$

   si ha: $C_8 = R \cdot v^5$ e $I_8 = R \cdot (1 - v^5)$.

   Quindi per l'ipotesi iniziale

   $C_8 = \frac{7}{3} \cdot I_8 \Rightarrow R \cdot v^5 = \frac{7}{3} R \cdot (1 - v^5)$

   e con pochi passaggi si ha $v^5 = \frac{7}{10} \Rightarrow i = 7,4\%$

Esercizio 3.2.11 Un prestito di 15000 € è rimborsabile in 15 anni al $5,5\%$ mediante pagamento di rate annue costanti. Dopo aver pagato la settima rata il debitore ottiene di pagare per quattro anni una rata dimezzata e di riprendere in seguito l'ammortamento con rate costanti in modo da compiere il rimborso al ventesimo anno. Determinare l'importo della rata originaria e della rata modificata.

Soluzione I flussi di pagamento sono raccolti nel seguente grafico:

t	0	1	...	7	8	9	10	11	12	...	20
rate	–	R	R	R	$\frac{R}{2}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{R}{2}$	R'	R'	R'

La rata del prestito è pari a:

$$R = \frac{15000}{a_{15\rceil 0,055}} = 1494,38$$

Da cui si ricava $\frac{R}{2} = 747,19$. Per calcolare le rate modificate R', si imposta la condizione di chiusura iniziale del prestito:

$$S = R \cdot a_{7\rceil 0,055} + \frac{R}{2} \cdot a_{4\rceil 0,055}\,(1+0,055)^{-7} + R' \cdot a_{9\rceil 0,055}\,(1+0,055)^{-11}$$

da cui si ricava $R' = 1220$.

3.2.3 Ammortamento americano

Esercizio 3.2.12 Tizio deve rimborsare un capitale di 20000 € tra otto anni. Egli paga annualmente in via posticipata gli interessi del 6%; al contempo provvede alla costituzione del capitale da rimborsare mediante versamenti annui di importo costante e posticipati presso una banca al tasso del 5%. Determinare l'esborso annuo complessivo e redigere il piano relativo alla costituzione del capitale mutuato.

Soluzione Indicando con $i = 0,06$ il tasso del prestito e con $i' = 0,05$ il tasso di accumulo del capitale, la rata per il fondo di costituzione si ricava da:

$$A = R \cdot s_{n\rceil i'} \quad \Rightarrow R = 2094,496$$

L'interesse sul prestito ammonta a:

$$I = S \cdot i \quad \Rightarrow I = 20000 \cdot 0,06 = 1200$$

Quindi l'esborso annuo complessivo è pari a:

$$R' = 2094,496 + 1200 = 3294,496$$

Esercizio 3.2.13 Un tale ha contratto un debito al cui rimborso deve provvedere mediante ammortamento americano in otto anni al tasso annuo dell' 11%. Sapendo che il fondo costituito dopo sei anni è uguale al valore attuale di una rendita di sei rate annue ciascuna di 3150, di cui la prima esigibile fra tre anni al tasso del 12%, determinare l'ammontare del debito tenendo presente che la costituzione del capitale da rimborsare avviene in base al tasso

del 9% annuo. Calcolare inoltre l'esborso annuo complessivo.
Soluzione Indicando con $i = 0,11$ il tasso del prestito e con $i' = 0,09$ il tasso di accumulo, il fondo accumulato al tempo sei è pari a

$$M_6 = R \cdot s_{6\rceil 0,09}$$

Per ipotesi M_6 coincide con il valore attuale di una rendita differita di tre anni di rata pari a 3150 con tasso di valutazione 12%:

$$A = R' \cdot a_{6\rceil 0,12}(1 + 0,12)^{-2}$$

Tale risultato può essere ugualmente ottenuto con la formula della rendita anticipata:

$$A = R' \cdot \ddot{a}_{6\rceil 0,12}(1 + 0,12)^{-3}$$

da cui si ottiene

$$M_6 = A \quad \Rightarrow R \cdot s_{6\rceil 0,09} = 3150 \cdot a_{6\rceil 0,12}(1 + 0,12)^{-2}$$

Da cui si ricava $R = 1211,43$.

L'ammontare del debito iniziale risulta pari all'ammontare del fondo costituito all'atto dell'ultimo versamento:

$$S = R \cdot s_{8\rceil 0,09} = 13360$$

da cui si ottiene l'esborso annuo complessivo $R' = 2681$.

3.2.4 Ammortamento italiano

Esercizio 3.2.14 Un prestito è rimborsabile in 16 anni con ammortamento italiano. Calcolare l'importo del prestito ed il tasso annuo, sapendo che il debito residuo dopo il pagamento della sesta rata è 5000 e la sesta quota interessi è 440.

Soluzione Nell'ammortamento italiano, il debito residuo è pari al numero delle quote capitali non ancora versate, quindi l'importo del prestito si ricava dalla seguente equivalenza:

$$D_k = S \cdot \frac{n-k}{n} \quad \Rightarrow S = 8000$$

Le quote capitali, tutte di pari importo, ammontano quindi a $C = \frac{S}{n} = 500$. Sfruttando il fatto che $I_6 = D_5 \cdot i$ e $D_5 = 5500$ si ricava $i = 0,08$.

Esercizio 3.2.15 Un debito di 30000 euro deve essere rimborsato con quote costanti di capitale. Sapendo che l'interesse al quinto anno è di 3000 euro e la rata al settimo anno è di 4750, calcolare la durata ed il tasso applicato.

Soluzione Dalle formule relative all'ammortamento italiano si ha:

$$\begin{cases} I_k = i \cdot C \cdot (n-k+1) \\ R_k = C \cdot (1 + i(n-k+1)) \end{cases}$$

Conoscendo l'ammontare del prestito si ricavano le quote capitali in funzione della sua durata:

$$C = \frac{S}{n} = \frac{30000}{n}$$

da cui il sistema iniziale diventa:

$$\begin{cases} 3000 = i \cdot \frac{30000}{n} \cdot (n-5+1) \\ 4750 = \frac{30000}{n} \cdot (1 + i(n-7+1)) \end{cases}$$

e dopo alcuni semplici passaggi si ha:

$$\begin{cases} i = \frac{3000n}{30000(n-4)} = \frac{n}{10(n-4)} \\ 4750n = 30000 \cdot (1 + \frac{n(n-6)}{10(n-4)}) \end{cases}$$

risolvendo in n la seconda equazione si ottiene

$$\begin{cases} i = 0,15 \\ n = 12 \end{cases}$$

N.B. per la variabile n si ottengono due diversi valori: 12 e $\frac{40}{7}$. Il secondo valore deve essere escluso poichè non accettabile.

3.2.5 Esercizi riassuntivi

Esercizio 3.2.16 *(Compito dell' 11/1/2006, Corsi D-E)* Un individuo riceve oggi un prestito di € 10000 che si impegna a restituire con una rata tra 3 anni di € 5000 e con una rata tra 6 anni di € 7000. Determinare il tasso annuo di interesse necessario per rendere possibile tale ammortamento.
Soluzione la condizione di chiusura iniziale del prestito è:

$$10000 = 5000(1+i)^{-3} + 7000(1+i)^{-6}$$

da cui si ricava, ponendo $x = (1+i)^{-3}$ la seguente equazione di secondo grado:

$$7x^2 + 5x - 10 = 0$$

che ha come unica soluzione ammissibile $x = 0,89$, quindi si ricava $(1+i)^{-3} = 0,89$ e quindi $i = 3,95\%$

Esercizio 3.2.17 *(Compito del 18/9/2006, Corsi D-E)* Un prestito di € 2000 viene ammortizzato in 3 anni versando 3 rate di uguale importo 800 €. Si usa la c.c. al tasso annuo del 6% per i primi due anni ed un diverso tasso x per il terzo anno. Calcolare tale tasso x e dopo averlo determinato redigere il piano d'ammortamento.
Soluzione La condizione di chiusura iniziale del prestito è:

$$2000 = 800(1+0,06)^{-1} + 800(1+0,06)^{-2} + 800(1+0,06)^{-2}(1+x)^{-1}$$

da cui si ricava

$$800(1+0,06)^{-2}(1+x)^{-1} = 533,286 \quad \Rightarrow (1+x)^{-1} = 0,749$$

e quindi $i = \frac{1}{0,749} - 1 = 0,335$. Il piano d'ammortamento quindi risulta:

t	R_t	C_t	I_t	D_t	E_t
0	-	-	-	2000	-
1	800	680	120	1320	680
2	800	720,8	79,2	599,2	1400,8
3	800	599,2	200,8	-	0

Esercizio 3.2.18 *(Compito del 7/9/2005, Corsi D-E)* In un ammortamento francese di durata 8 anni la quinta quota capitale è il doppio della corrispondente quota interessi. Determinare il tasso annuo d'interesse del prestito.
Soluzione Nell'ammortamento francese valgono le seguenti relazioni:

$$R = I_k + C_k$$

$$R = C_k(1+i)^{n-k+1}$$

da cui si ricava

$$I_k = C_k(1+i)^{n-k+1} - C_k$$

Sapendo che $C_5 = 2 \cdot I_5$ si ha:

$$I_5 = 2 \cdot I_5(1+i)^4 - 2 \cdot I_5$$

e dividendo tutto per I_5

$$(1+i)^4 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow i = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} - 1 = 10,67\%$$

Esercizio 3.2.19 *(Compito dell' 11/6/2007, Corsi D-E)* Abbiamo preso a prestito la somma di 18000 € 4 anni fa; tale somma doveva essere rimborsata in 10 anni con ammortamento italiano al tasso $i = 11\%$, rate posticipate. Oggi al momento della quarta rata verso ulteriori 4000 €, chiedo di sospendere il pagamento per 3 anni e al momento della ripresa regolare dei pagamenti, di estinguere il debito con ammortamento francese a rata costante. Quant' è l'importo delle rate dopo la sospensione sapendo che restano invariati sia l'interesse, sia il numero degli anni di estinzione del debito?
Soluzione L'ammortamento italiano permette di calcolare le quote capitali versate ogni anno. Si ha quindi:

$$C = \frac{A}{n} \quad \Rightarrow C = \frac{18000}{10} = 1800$$

Il debito estinto dopo il pagamento della quarta rata è:

$$E_4 = 1800 \cdot 4 = 7200$$

cui si aggiungono i 4000 euro versati. Dopo la sospensione, pertanto, il debito residuo risulta pari a:

$$D_7 = (18000 - 7200 - 4000)(1 + 0,11)^3 = 9300$$

Quindi le tre rate successive alla sospensione ammonteranno a:

$$R = \frac{D_7}{a_{3\rceil 0,11}} = 3805,64$$

Esercizio 3.2.20 *(Compito del 16/12/2005, Corsi A-B-C)* Si rediga il piano di ammortamento in 4 anni con metodo francese, di un debito pari a 10000 euro sapendo che il tasso pari al 1% per i primi due anni e che dopo il pagamento della seconda rata passa al 2%.
Soluzione La rata iniziale, prima della variazione del tasso è:

$$R = \frac{10000}{a_{4\rceil 0,01}} = 2562,81$$

quindi il piano d'ammortamento relativo ai primi due anni risulta:

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0		-	-	-	10.000	-
1	1%	2.562,81	2.462,81	100	7.537,19	2.462,81
2	1%	2.562,81	2.487,44	75,37	5.049,75	4.950,25

Al secondo anno, quindi, la variazione di tasso produce una nuova rata d'ammortamento da calcolare sul debito residuo al tempo $k = 2$. La nuova rata diventa:

$$R' = \frac{5049,75}{a_{2\rceil 0,02}} = 2600,87$$

Da cui si ricava il piano d'ammortamento completo:

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0		-	-	-	10.000	-
1	1%	2.562,81	2.462,81	100	7.537,19	2.462,81
2	1%	2.562,81	2.487,44	75,37	5.049,75	4.950,25
2	1%	2600,87	2.499,88	101,00	2.549,87	7.450,37
2	1%	2600,87	2.549,87	51	0	10.000

Esercizio 3.2.21 *(Compito dell' 11/1/2006, Corsi A-B-C)* Dopo aver delineato le caratteristiche peculiari dell'ammortamento francese si completi il seguente piano di ammortamento a tasso costante con metodo francese.

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0		-	-	-	20000	-
1				400		
2						
3						20000

Soluzione Le informazioni contenute nel piano d'ammortamento relative al debito iniziale ed alla prima quota capitale permettono di ricavare il tasso d'interesse applicato sul prestito. Si ha infatti

$$i = \frac{I_1}{D_0} = \frac{400}{20000} = 0,02$$

Conoscendo poi il tasso di interesse, si ottiene l'ammontare della rata costante, mediante la formula del valore attuale di una rendita posticipata:

$$R = \frac{A}{a_{n\rceil i}} = \frac{20000}{a_{3\rceil 0,02}} = 6935,09$$

In maniera ricorsiva, quindi, si calcolano le quote capitali e le successive quote interessi, come riassunto nel piano d'ammortamento che segue:

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0		-	-	-	20000	-
1	2%	6935,09	6535,09	400	13464,91	6535,09
2	2%	6935,09	6665,8	269,3	6799,11	13200,89
3	2%	6935,09	6799,11	135,98	-	20000

Capitolo 4

Valutazione degli investimenti

4.1 Richiami di teoria

4.1.1 VAN e TIR

La valutazione degli investimenti è quell'attività che viene effettuata per verificare l'impatto che un determinato progetto di investimento ha sulla struttura che lo adotta (azienda, privato, ecc.), dove per progetto d'investimento si intende un insieme di attività produttive o finanziarie in cui l'azienda o il privato impegna capitale (costo dell'investimento) con l'obiettivo di conseguire, in contropartita, un flusso di benefici futuri complessivamente superiori ai costi sostenuti.

Il problema che viene affrontato dalla valutazione degli investimenti è, nella sostanza, un problema di scelta: ogni azienda o privato deve, infatti, decidere se effettuare un determinato investimento o quale scegliere tra proposte d'investimento diverse. Per poter risolvere a sistema tale problema di scelta fra possibili alternative è necessario poter discriminare le diverse possibilità in base ad un'unità di misura che deve essere in grado di evidenziare sia la validit delliniziativa, sia i correlati effetti economico finanziari: è comunemente accettato che l'unità di misura cui fare riferimento in questo caso sia il valore economico delliniziativa.

Il costo di un investimento è dato dai flussi finanziari in uscita connessi alla sua attuazione; analogamente, i benefici ad esso associati sono costituiti da flussi finanziari in entrata. In tal modo un'operazione d'investimento pu essere rappresentata da una successione (stimata) di future entrate ed uscite monetarie denominata *flusso di cassa*.

Altro fattore determinante nella valutazione degli investimenti è il tempo: la rilevanza del fattore tempo dipende da un effetto di carattere finanziario che lo lega al valore del denaro e secondo cui, a parità di altre condizioni, ad un allungamento dei tempi di rientro delle risorse investite in un progetto corrisponde una contrazione dei benefici di ordine finanziario.

Ulteriore elemento essenziale del processo di valutazione è il tasso dinteresse scelto a riferimento: il tasso d'interesse al quale si attualizzano i flussi finanziari (in entrata ed in uscita) è denominato *costo opportunità* del capitale perchè rappresenta un'alternativa alla quale si rinuncia per intraprendere il particolare progetto d'investimento analizzato.

I principali criteri che verranno analizzati per la valutazione degli investimenti sono il criterio del VAN (o REA) ed il criterio del TIR.

Il criterio del VAN

Il criterio del VAN (Valore Attuale Netto, spesso denominato anche REA, acronimo per Rendimento Economico Attualizzato) si basa sul principio secondo il quale un'iniziativa merita di essere presa in considerazione solo se i benefici che ne possono derivare sono superiori alle risorse utilizzate. Nella costruzione della formula di calcolo del VAN si parte dalla legge di capitalizzazione adattandola ad operazioni che producono flussi di cassa distribuiti lungo diversi periodi; pertanto il VAN risulta dato dall'espressione seguente:

$$VAN(i) = \sum_{t=0}^{n} x_t (1+i)^{-t}$$

dove x_t rappresentano i flussi in entrata/uscita alle diverse scadenze.

Un progetto risulta conveniente se il suo VAN è maggiore di zero, in altri termini un progetto risulta conveniente quando le entrate attualizzate superano le relative uscite. Tale criterio è utilizzato soprattutto per la valutazione tra più progetti alternativi che possono essere realizzati attraverso lo stesso esborso iniziale. Il progetto con VAN maggiore sarà preferito rispetto agli altri. Aspetto cruciale del calcolo del VAN è la scelta del tasso di interesse a cui effettuare la valutazione. Solitamente il tasso utilizzato è il tasso relativo ad un'operazione priva di rischio (ad esempio il tasso di rendimento dei BOT). In alcune valutazioni, soprattutto aziendali, possono essere però scelti tassi più idonei, quali ad esempio tassi di rendimento di investimenti azionari.

Il criterio del TIR

Data l'operazione

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline\hline 0 & t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{array}$$

si definisce Tasso Interno di Rendimento, *T.I.R.*, dell'operazione il tasso di interesse i^* della legge di sconto composto in base al quale l'operazione è equa, cioè ha un valore attuale nullo. In formule si ha:

$$\sum_{k=0}^{n} x_k(1+i^*)^{-t_k} = 0$$

Supponendo che l'operazione oggetto di valutazione sia un investimento che produce flussi annui x_t dietro un esborso iniziale pari a P, la formula per calcolare il rendimento di tale investimento può essere riscritta come segue:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(1+i^*)^{-k} - P = 0$$

Tale equazione di grado n ammette al più n soluzioni. Non è sempre possibile, quindi, risolvere tale equazione in maniera analitica, ma spesso è necessario ricorrere a metodi di ricerca degli zeri di tipo approssimato. Tale strumento, sebbene utile per confrontare investimenti che generano flussi differenti, non sempre produce risultati facilmente interpretabili. È possibile, infatti, risolvendo tale equazione, trovare più di una soluzione compatibili con il valore di un tasso d'interesse.

4.1.2 TAN e TAEG

A tutela del consumatore, il Testo Unico Bancario ha stabilito una serie di disposizioni e norme sulla trasparenza nei contratti di credito al consumo. Tra queste vi è l'obbligo per il finanziatore di dichiarare sia il tasso nominale (TAN) applicato sul finanziamento che il costo effettivo comprensivo di tutti gli oneri legati al finanziamento (TAEG). Il TAN, tasso annuo nominale, è quel tasso di interesse espresso in percentuale sul credito concesso al cliente. Normalmente, per valutare bene la convenienza di un finanziamento, non basta conoscere solamente la misura del tasso annuale applicato dal creditore. Occorre sapere anche in che misura incidono tutta una serie di oneri, che di solito sono presenti, tipo le spese di istruttoria della pratica per il finanziamento, spese di assicurazione e garanzia, spese di riscossione delle rate, ecc. La legge stabilisce che, a garanzia del consumatore, gli annunci pubblicitari e le offerte effettuati con qualsiasi mezzo, devono indicare anche il TAEG ed il relativo periodo di validità delle promozioni stesse. Il tasso annuo effettivo globale o TAEG è l'indicatore di tasso di interesse di un'operazione di finanziamento (es. un prestito, l'acquisto rateale di beni o servizi), ora conosciuto come ISC o Indice sintetico di Costo. È espresso in percentuale ed indica il costo effettivo del mutuo. I parametri che determinano il TAEG o ISC sono fissati per legge. In particolare, oltre alla struttura del rimborso finanziario, rientrano a far parte del calcolo di questo tasso tutte le spese accessorie obbligatorie inerenti all'atto del finanziamento, ovvero:

- spese di istruttoria della pratica
- commissioni d'incasso
- assicurazioni obbligatorie

Non rientrano invece a far parte dei parametri che incidono sul TAEG:

- bolli statali
- tasse
- assicurazioni non obbligatorie

In regime di interesse composto, l'equazione che definisce il TAEG definita applicando il principio di equivalenza in $t_0 = 0$ e calcolando per i:

$$V - S_0 = \sum_{k=1}^{n} (R_k + C_k) \cdot (1+i)^{-k}$$

dove C_k rappresenta l'ammontare delle spese periodiche, R_k la rata del prestito, V rappresenta il valore attuale del prestito e S_0 sono le spese iniziali. Cosicchè la prima parte dell'equazione indica la somma effettivamente ricevuta in prestito.

4.2 Esercizi svolti

4.2.1 VAN e TIR

Esercizio 4.2.1 Per l'acquisto di un macchinario, un imprenditore riceve le seguenti proposte di vendita:

1) pagamento di 41.000 € subito e di 84.000 €, suddivise in due rate di uguale importo, tra uno e tre anni;

2) pagamento di tre rate annue di importo R, 2R e 3R.

Determinare R affinchè le due alternative si equivalgano essendo il tasso di valutazione del 5% annuo.
Soluzione Il Van del primo progetto risulta pari a:

$$Van_A(5\%) = +41000 + 42000(1+0,05)^{-1} + 42000(1+0,05)^{-3} = 117281,1791$$

Perchè i due investimenti siano indifferenti, il Van del secondo progetto deve coincidere con quello appena calcolato. Da tale equivalenza si ricava l'ammontare delle diverse rate.

$$Van_B(5\%) = R(1+0,05)^{-1}+2R(1+0,05)^{-2}+3R(1+0,05)^{-3} = 117.281,1791$$

Da cui si ottiene $R = 21.889,178$.

Esercizio 4.2.2 Dovendo acquistare un'immobile del valore di 250.000 €, vi vengono prospettate due alternative.

1) pagare subito in contanti, ottenendo uno sconto del 15%.

2) pagare mediante 3 rate di importo R anticipate costanti al tasso annuo 0,05. Determinare la rata R che rende indifferenti le due alternative.

Soluzione L'esborso relativo alla soluzione a) risulta pari a:

$$Van_A = 250.000(1 - 15\%) = 212.500$$

Le due alternative risultano indifferenti se hanno lo stesso Van, per cui si ha:

$$Van_B = R \cdot \ddot{a}_{3\rceil 0,05} = 212.500$$

da cui si ricava $R = 74316,02$

Esercizio 4.2.3 Un'operazione finanziaria presenta il seguente profilo di movimenti di cassa:

Epoca	*Flusso*
0	-1000
1	200
2	R

Determinare R tale per cui il TIR dell'operazione sia superiore al 10%. Determinare inoltre quali valori di R garantiscono un VAN (calcolato al 10%) che supera il 5% del capitale investito.
Soluzione Il Van dell'operazione a tasso i è dato dalla seguente espressione:

$$Van(i) = -1000 + 200(1 + i)^{-1} + R(1 + i)^{-2}$$

Che risulta una funzione strettamente monotona decrescente e concava del tasso di valutazione i. Il TIR dell'operazione è quel tasso i^* che annulla il Van ($Van(i^*) = 0$). Poichè il Van(i) è funzione decrescente di i, si ha:

$$\begin{array}{rcl} i & \leq & i^* \Rightarrow Van(i) \geq 0 \\ i & > & i^* \Rightarrow Van(i) < 0 \end{array}$$

Pertanto, il TIR del progetto è superiore al 10% se risulta$Van(10\%) \geq 0$:

$$Van(10\%) = -1000 + 200(1,1)^{-1} + R(1,1)^{-2} \geq 0$$

E questo si verifica se e solo se $R \geq 990$.
Il capitale investito è pari al costo iniziale di 1.000; i valori di R che soddisfano la seconda richiesta sono quelli che verificano la seguente disequazione:

$$Van(10\%) = -1000 + 200(1,1)^{-1} + R(1,1)^{-2} \geq 5\% \cdot 1000$$

da cui si ricava $R \geq 1050, 5$.

Esercizio 4.2.4 Un impiego è descritto dalla seguente sequenza di entrate e uscite:

Epoca	*Flusso*
0	-1000
1	400
2	300
3	300
4	100
5	R

Calcolare R in modo tale che il TIR dell'operazione risulti pari al 15%. Si confronti, inoltre, l'impiego precedente con la seguente operazione (utilizzando come tasso di valutazione il 15%):

Epoca	*Flusso*
0	-1000
3	700
5	700

Senza ulteriori calcoli, dire se il TIR di quest'ultima operazione è minore o maggiore del 15%, giustificando la risposta.

Soluzione Il TIR dell'operazione è quel tasso i^* che annulla il Valore attuale netto ($Van(i^*) = 0$). Affinchè il TIR dell'operazione risulti il 15% deve valere:

$$\begin{aligned} Van_A(15\%) &= -1000 + 400(1,15)^{-1} + 300(1,15)^{-2} + 300(1,15)^{-3} + \\ &+ 100(1,15)^{-4} + R(1,15)^{-5} = 0 \end{aligned}$$

Da cui risulta $R = 343,74$.
Le due operazioni vengono confrontate utilizzando il criterio del valore attuale netto al tasso di valutazione i=15%. Si ha $Van_A(15\%) = 0$ per la prima operazione, mentre il Van_B è pari a:

$$Van_B(15\%) = -1000 + 700(1,15)^{-3} + 700(1,15)^{-5} = -191,715 < 0$$

Poichè il $Van_A > Van_B$, la prima operazione risulta migliore della seconda. Infine, si può affermare che il Tir dell'investimento B è inferiore al 15%, essendo il VAN funzione monotona decrescente del tasso d'interesse.

Esercizio 4.2.5 La società mercanti prende in esame quattro progetti di investimento che si escludono a vicenda:

Dati	*A*	*B*	*C*	*D*
Investimento	40.000	25.000	40.000	30.000
Flussi annui	12.000	8.000	8.000	6.500
Durata(anni)	5	5	10	10
i	12%	12%	12%	12%

Calcolare VAN e TIR dei quattro progetti e classificarli in base ai due metodi.
Soluzione Il Van di ciascun progetto, calcolato al tasso opportunità del 12% risulta:

$$\begin{aligned} Van_A(12\%) &= -40.000 + 12.000 \cdot a_{5\rceil 0,12} = 3257,31 \\ Van_B(12\%) &= -25.000 + 8.000 \cdot a_{5\rceil 0,12} = 3838,21 \\ Van_C(12\%) &= -40.000 + 8.000 \cdot a_{10\rceil 0,12} = 5201,78 \\ Van_D(12\%) &= -30.000 + 6.500 \cdot a_{10\rceil 0,12} = 6726,45 \end{aligned}$$

Secondo il criterio del Van la scelta dei progetti dovrebbe avvenire con la seguente gerarchia: D, C, B, A. Se, invece, calcoliamo il TIR dei diversi progetti di investimento (il calcolo può essere fatto solo con metodi numerici approssimati) risulta:

$$\begin{aligned} Tir_A &= 15,238\% \\ Tir_B &= 18,031\% \\ Tir_C &= 15,098\% \\ Tir_D &= 17,257\% \end{aligned}$$

Applicando il criterio del TIR cambia la graduatoria dei progetti: B, D, A, C. Tale cambiamento mette in luce due apetti di criticità dei progetti: il fattore tempo e l'importo dell'investimento.

Esercizio 4.2.6 Dovendo investire 80.000 € per 4 anni, Sempronio chiede una consulenza alla propria banca. Le alternative proposte sono le seguenti:

1) investire per 4 anni l'intera somma al 2,8%

2) investire per il primo anno al 2% annuo, per il secondo anno e il terzo anno al 3,1% e per il quarto anno al 3,6%.

Determinare quale alternativa è più conveniente.

Soluzione L'alternativa più conveniente è quella che produce un montante maggiore. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} M_1 &= 80.000(1+0,028)^4 = 89343,39 \\ M_2 &= 80.000(1+0,02)(1+0,031)^2(1+0,036) = 89860,17 \end{aligned}$$

L'alternativa 2) risulta più conveniente.

Esercizio 4.2.7 Dato un progetto che richiede un investimento iniziale di 100 milioni e che avrà i seguenti flussi:

Epoca	*Flusso*
1	$+30ml$
2	$+60ml$
3	$+50ml$
4	$+50ml$

Dall'anno 5 in avanti si ha poi un flusso perpetuo di 1 milione all'anno.Determinare il VAN del progetto dato i=5%.
Soluzione Il VAN risulta:

$$\begin{aligned} Van(5\%) &= -100+30(1,05)^{-1}+60(1,05)^{-2}+50(1,05)^{-3}+ \\ &+ 50(1,05)^{-4}+\frac{1}{0,05} = 87,32 \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine nel calcolo del VAN rappresenta il valore attuale di una rendita perpetua di rata unitaria.

Esercizio 4.2.8 Dato un progetto che richiede un investimento iniziale di 100ml e che avrà i seguenti flussi: all'anno 1 +50ml; all'anno 2 +60ml; determinare il TIR del progetto. Se il costo opportunità è del 3%, conviene intraprendere il progetto?

Soluzione Il TIR del progetto è il tasso i^* che rende nullo il suo VAN:

$$Van(i^*) \quad = \quad -100 + 50(1+i^*)^{-1} + 60(1+i^*)^{-2} = 0$$

Il tasso che si ottiene è $i^* = 6,394\%$. Se il costo opportuità del capitale è del 3%, l'investimento risulta conveniente.

4.2.2 TAN e TAEG

Esercizio 4.2.9 La banca A propone ad un investitore di impiegare i suoi risparmi offrendogli il 5,5% annuo composto al lordo di una ritenuta fiscale sugli interessi del 27%. La banca B propone invece un tasso quadrimestrale netto composto del 1,5%. Determinare la banca più conveniente.

Soluzione Il tasso annuo equivalente per la banca B si ottiene dalla formula di equivalenza dei tassi:

$$i_B = (1+i_3)^3 - 1 = (1+0,015)^3 - 1 = 4,57\%$$

Se il confronto avvenisse in base al TAN dei due investimenti la banca A sarebbe da preferire alla banca B. Se, però nel calcolo includiamo anche la tassazione τ, il tasso netto della banca A diventa:

$$i_A = i(1-\tau) = i(1-27\%) = 4,02\%$$

Al netto della tassazione, il tasso migliore risulta quello applicato dalla banca B.

Esercizio 4.2.10 Voglio acquistare uno strumento piuttosto costoso, ma non posso pagarlo subito, ho la necessità di ottenere un pagamento rateale. Mi informo presso due rivenditori:

- Il rivenditore A, a fronte di un prezzo di listino di euro 1.012, mi propone le seguenti condizioni di pagamento:
  - con pagamento alla consegna: 961 euro

  - con pagamento anticipato: 933 euro
  - con pagamento rateale: 83 euro alla consegna + 12 rate mensili da 80,20 euro; TAN 0%, TAEG 3,01%.

- Il rivenditore B, a fronte di un prezzo di listino di euro 1.044, mi propone le seguenti condizioni di pagamento:
  - con pagamento alla consegna: 939,6 euro
  - con pagamento rateale: importo finanziato 940 euro, con 12 rate mensili da 84,65 euro; TAN 14,56%, TAEG 15,58%.

Verificare l'esattezza dei tassi dichiarati e valutare il finanziamento più conveniente.
Soluzione A prima vista, il rivenditore A sembra essere pi'u convenienti: ha un prezzo di listino e un importo della rata inferiori ed espone un tasso effettivo minore rispetto a B. Guardando i flussi di cassa coinvolti, stupisce la grande differenza di tasso applicato a fronte di esborsi simili. Calcoliamo quindi il Taeg per entrambi gli investimenti. L'equazione che definisce il tasso interno mensile è:

$$961 = 83 + 80,2 \cdot a_{12\rceil i^*_{12}}$$

da cui si ricava in maniera approssimata $i^*_{12} = 1,44\%$. Il TAEG annuo corrispondente risulta:

$$i^* = (1 + i^*_{12})^{12} - 1 = 18,73\%$$

Con semplici passaggi, invece, si dimostra che il TAEG dichiarato dal venditore B risulta coerente con il finanziamento erogato, quindi il finanziamento B risulta più conveniente rispetto ad A. Si osservi che il tasso dichiarato dal venditore A non corrisponde ad alcun importo tra quelli presenti nelle proposte di finanziamento considerando un tasso mensile effettivo pari al TAEG riportato.

4.2.3 Esercizi riassuntivi

Esercizio 4.2.11 *(Compito 1/2/2006, Corsi A-B-C)* Ricordando la definizione di rendimento economico attualizzato (REA) di una operazione finanziaria, si determini il tasso nominale annuo convertibile semestralmente$j_2 \in [0,1]$ tale che la seguente operazione finanziaria abbia $REA = -10000$.

t	0	6 $mesi$	24 $mesi$
X	-10000	-12500	21600

Soluzione Il REA il valore attuale dei flussi di cassa, determinato ad un dato tasso i. Il REA del progetto dato da

$$REA = -10000 - \frac{12500}{1+i_2} + \frac{21600}{(1+i_2)^4}$$

Il tasso semestrale che determina un REA pari a ?10000 il tasso che risolve, quindi, la seguente equazione

$$-10000 = -10000 - \frac{12500}{1+i_2} + \frac{21600}{(1+i_2)^4}$$

ovvero, moltiplicando ambo i membri per $(1+i_2)^4$ e semplificando si ha

$$-12500 \cdot (1+i_2)^3 + 21600 = 0$$

da cui si ottiene

$$(1+i_2)^3 = \frac{21600}{12500}$$

e quindi $i_2 = \sqrt[3]{\frac{21600}{12500}} - 1 = 0,2$; il tasso annuo convertibile semestralmente diventa quindi $j_2 = i_2 \cdot 2 = 0,4$

Esercizio 4.2.12 *(Compito 1/2/2006, Corsi A-B-C)* Siano dati i seguenti progetti finanziari

A:

t	0	1	2
C	-4000	X	$1874,6$

B:

t	0	1	2
C	-4000	2100	2050

a) Determinare l'importo X tale che il progetto A abbia T.I.R.= 3%.

b) Utilizzando il criterio del T.I.R. determinare il miglior progetto tra A e B.

Soluzione a) Il T.I.R. di un progetto è quel tasso che rende il suo REA=0, quindi l'importo X può essere calcolato come segue:

$$-4000 + \frac{X}{1+0,03} + \frac{1874,6}{(1+0,03)^2} = 0$$

da cui si ricava X = 2300.
b) Noto il T.I.R. di A, basta calcolare il T.I.R. di B e confrontare il risultato ottenuto. Si ha quindi:

$$-4000 + \frac{2100}{1+i} + \frac{2050}{(1+i)^2} = 0$$

o equivalentemente $-4000(1+i)^2 + 2100(1+i) + 2050 = 0$. Posto $x = (1+i)$, si ottiene

$$-4000x^2 + 2100x + 2050 = 0$$

Le due soluzioni di tale equazione sono: $x_1 = -0,5$ (non accettabile), $x_2 = 1,025$ e quindi $i = 2,5\%$. Poichè A e B sono due progetti di investimento, in base al criterio del T.I.R., A è preferito a B.